<u>Breviar Teoretic: Mulțimea numerelor reale</u> - mulțimea tuturor numerelor raționale și a celor cu număr infinit de zecimale și radicali

<u>Operații cu numere reale</u>

<u>Adunarea</u>

<u>Proprietăți:</u>

1. Comutativitate: $a+b=b+a, \forall a,b \in \Re$

2. Asociativitate: $(a+b)+c=a+(b+c), \forall a,b,c \in \Re$

3. Element neutru 0: $a+0=0+a=a, \forall a \in \Re$

4. Elementul opus: $a+(-a)=(-a)+a=0, \forall a \in \Re$

<u>Înmulțirea</u>

<u>Proprietăți</u>

1. Comutativitate: $a \cdot b=b \cdot a, \forall a,b \in \Re$

2. Asociativitate: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c), \forall a,b,c \in \Re$

3. Element neutru 1: $a \cdot 1=1 \cdot a=a, \forall a \in \Re$

4. Distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere: $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c, \forall a,b,c \in \Re$

5.Elementul invers $a \cdot \frac{1}{a}=\frac{1}{a} \cdot a=1, \forall a \in \Re^*$

<u>Ridicarea la putere</u>

$$a^n=\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{de\, n\, ori}$$

Extragerea rădăcinii pătrate

Proprietăți ale radicalilor: $\sqrt{x^2}=|x|$, $|x|=\begin{cases} x, x>0 \\ 0, x=0 \\ -x, x<0 \end{cases}$ $\sqrt{x^n}=\left(\sqrt{x}\right)^n, x>0$

$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, x, y > 0$ $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, x, y > 0, y \neq 0$ $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}, x, y > 0$

Ex. $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = |6| = 6$; $|-4| = 4$; $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1,\quad 1 < \sqrt{2}$;

$\sqrt{108} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$; $\sqrt{24} + \sqrt{32} - \sqrt{8} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Formule de calcul prescurtat

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Exemplu de aplicație: 1. Arătați că $A \in Z$, unde $A = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$

Rezolvare:

Se amplifică fiecare fracție cu conjugatul numitorului, aplicându-se formula $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$A = \frac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} + \frac{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} \Rightarrow A = \frac{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \cdot 2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 2 + 2^2}{3-4}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3 + 4\sqrt{3} + 4 + 3 - 4\sqrt{3} + 4}{-1} \Rightarrow A = -14 \in Z$$

2. Să se rezolve ecuația: $|3x - 6| = 9$

Rezolvare:

Se rezolvă cazurile: I. $3x - 6 = 9 \Rightarrow 3x = 9 + 6 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

II. $3x - 6 = -9 \Rightarrow 3x = -9 + 6 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Medii: Media aritmetică: $M_a = \frac{a+b}{2}$ $M_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$

Media geometrică: $M_g = \sqrt{a \cdot b}$ $M_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ...... \cdot a_n}$

Partea întreagă: $[x] = k, k \in Z \Leftrightarrow x \in [k, k+1)$ a

Exemplu : $[2{,}73] = 2$ sau $[-5{,}47] = -6$

Partea fracționară: $\{x\} = x - [x]$

Exemplu: $\{3{,}48\} = 3{,}48 - 3 = 0{,}48$ sau $\{-4{,}57\} = -4{,}57 - (-5) = 0{,}43$

Aplicații:

1. Rezolvați în $\Re$ ecuațiile:

   a) $|2x-3|=1$ b) $|3x-1|=2$ c) $\left|5-\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{3}$ d) $|4x-8|=12$

2. Aflați partea întreagă și partea fracționară ale soluțiilor următoarelor ecuații:

   a) $2x-3=5$ b) $\frac{4x-2}{4}=6$ c) $\frac{4x-3}{2}-\frac{3x-4}{5}=0$

3. Să se rezolve în $\Re$ inecuațiile:
   a) $|4x-1|\le 3$
   b) $|2x+5|<\frac{2}{3}$
   c) $|4x-5|\le 7$

4. Să se calculeze:
   a) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$
   b) $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}+\sqrt{192}-8\sqrt{3}$
   c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{28}}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$

5. Calculați media aritmetică a numerelor:
   a) 3 și $\sqrt{25}$
   b) $2-\sqrt{5}$ și $\sqrt{5}$
   c) $1+\sqrt{3}$ și $1-\sqrt{3}$

6. Calculați media geometrică a numerelor:
   a) 32 și 216
   b) $27\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}$
   c) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ și $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

7. a) Scoateţi factorii de sub radical: $\sqrt{24};\sqrt{180};\sqrt{99}$

   b) Introduceţi factorii sub radical: $2\sqrt{7};4\sqrt{6};12\sqrt{3}$.

8. Calculaţi produsul $a\cdot b$: $a=\sqrt{48}-\sqrt{18}-\sqrt{108}+\sqrt{128}$ și $b=\sqrt{162}-\sqrt{75}-\sqrt{32}+\sqrt{147}$.

9. Să se calculeze raţionalizând mai întâi numitorii:

a) $\frac{4-3\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}-\frac{5\sqrt{6}-7}{4\sqrt{2}}+\frac{3+2\sqrt{6}}{5\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{6}-3}{6\sqrt{2}}$

b) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{9}+\sqrt{5}}$

10. Să se calculeze $x=\frac{1}{8}\cdot(2a+b)$ unde: $a=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})+4\sqrt{6}$ și

   $b=(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})+8\sqrt{10}$.

11. Folosind formulele de calcul prescurtat calculaţi:

a) $(2\sqrt{3}+1)^2-2(2\sqrt{3}-1)^2-3(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)$

b) $(6\sqrt{5}+\sqrt{3}+1)^2$

12. Să se calculeze media aritmetică a numerelor: $a=5\sqrt{2}+4\sqrt{3}$ și $b=5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$.

13. Calculaţi x din proporţia: $\dfrac{x}{2\sqrt{3}+3}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$.

14. Calculaţi: a) $\sqrt{25}-3\cdot\sqrt{16}+2\cdot\sqrt{64}=$

b) $\sqrt{9}-2\cdot\sqrt{4}+3\cdot\sqrt{36}=$

c) $\sqrt{49}-4\cdot\sqrt{4}+3\cdot\sqrt{64}=$

d) $\sqrt{81}-3\cdot\sqrt{25}+4\cdot\sqrt{36}=$

15. Calculaţi: a) $\sqrt{225}-2\cdot\left(\sqrt{144}-\sqrt{100}\right)=$

b) $\sqrt{121}-3\cdot\left(\sqrt{169}-\sqrt{81}\right)=$

c) $\sqrt{196}-4\cdot\left(\sqrt{144}-\sqrt{121}\right)=$

d) $\sqrt{169}-2\cdot\left(\sqrt{121}-\sqrt{100}\right)=$

16. Determinați numerele naturale *a*, pentru care: a) $\sqrt{a}=51$ b) $\sqrt{a}=45$ c) $\sqrt{a}=56$.

Rezolvări:

<table>
<tr><td colspan="2" align="center"><u>Breviar Teoretic: Progresii</u></td></tr>
<tr><td align="center">Progresia aritmetică</td><td align="center">Progresia geometrică</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">DEFINIȚII</td></tr>
<tr><td>Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ pentru care, fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin adunarea unui aceluiași număr r.
Numărul r se numește <u>rația </u>progresiei aritmetice
$r = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1}$
Observație: Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă arătăm că diferența a doi termini consecutive este constantă:
$a_{n+1} - a_n = r$ (constantă), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde r este rația progresiei aritmetice, $r \neq 0$.</td><td>Un şir $(b_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, având primul termen nenul, în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine din din cel precedent prin înmulţirea cu un acelaşi număr $q, q \neq 0$.
Numărul $q, q \neq 0$ se numeşte raţia progresiei.
$q = \frac{b_2}{b_1} = \ldots\ldots\ldots = \frac{b_n}{b_{n-1}}$
Observație: Șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică dacă arătăm că raportul a doi termeni consecutivi este constant: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ (constantă), $\forall n \in \mathrm{N}^*$, unde q este raţia progresiei geometrice, $q \neq 1$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">FORMULA TERMENULUI GENERAL</td></tr>
<tr><td>Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică având primul termen a_1 şi raţia r, atunci termenul general a_n are forma:
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r, \forall n \geq 2$.</td><td>Dacă şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică având primul termen b_1 şi raţia q, atunci termenul general b_n are forma: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall n \geq 2$.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">PROPRIETĂȚI</td></tr>
<tr><td>Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică dacă și numai dacă orice termen al său, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui, adică dacă:
$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Leftrightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$
Trei numere x, y, z sunt termeni consecutivi în progresie aritmetică dacă și numai dacă:
$y = \frac{x+z}{2}$
Într-o progresie aritmetică:
$a_n + a_1 = a_{n-1} + a_2 = \ldots\ldots.$</td><td>1. Șirul cu termini pozitivi $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometric dacă și numai dacă orice termen al său, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui, adică dacă: $b_n = \sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}} \Leftrightarrow$ $(b_n)^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1}$
Trei numere positive sunt termeni consecutivi în progresie geometrică dacă și numai dacă:
$y = \sqrt{x \cdot z}$
Într-o progresie geometrică:
$b_n \cdot a_1 = b_{n-1}\cdot b_2 = \ldots\ldots.$</td></tr>
<tr><td>Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este dată de formula:
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n, \forall n \geq 2$ sau
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot r}{2}\cdot n, \forall n \geq 2$</td><td>Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este dată de formula:
$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}, q \neq 1, \forall n \geq 1$</td></tr>
</table>

Aplicații:

1. Să se determine al zecea termen al șirului: 1, 5, 9, ...
2. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice $a_1, a_2, a_3, 17, 21$.
3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 = 4$ și $r = -1$. Să se calculeze a_{30}.
4. Să se calculeze a_7 știind că $a_1 = 7$ și $a_2 = 9$, unde $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică.
5. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 = 4$ și $a_4 = 10$. Să se calculeze a_{25}.
6. Calculați suma primilor zece termeni ai unei progresii aritmetice știind că $a_1 = 3$ și $r = 2$.
7. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetica cu $a_3 = 5$ și $a_5 = 11$. Să se calculeze suma primilor șapte termeni ai progresiei.
8. Sa se calculeze produsul primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice știind că primul termen este -3 si rația este 3.
9. Să se determine suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice știind că suma primilor trei termeni este 21 și diferența dintre al doilea și primul termen este 4.
10. Să se calculeze suma 3+5+7+…+21.
11. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ știind ca $r = 3$și suma primilor 10 termeni ai progresiei este egală cu 145.
12. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetica cu $a_1 = 2$ și$a_3 = 8$. Să se calculeze suma primilor treizeci termeni ai progresiei.
13. Să se determine $x \in \Re$ știind că $x-1, x+1, 3x-1$sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
14. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie arithmetică cu$a_3 = 5$ și $a_2 = 6$. Calculati a_{2019}.
15. Calculați suma 1+5+9+13+…+25.
16. Să se determine $x \in \Re$ știind că $x-4, 4, x-2$sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
17. Să se calculeze suma 2+4+6 +...+ 2012+2014.
18. Să se determine $x \in \Re$ știind că$x-4, x+2, 2x+2$sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
19. O progresie aritmetică cu *r* =5 are suma primilor trei termeni egală cu 126. Aflați primul termen al progresiei aritmetice.
20. Demonstrați că $x+7, 2x+5, 3x+3$sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice, $\forall x \in \Re$.
21. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 = 3$ și $b_2 = 6$. Să se calculeze b_4.
22. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_2 = 3$ și $q = 3$. Să se calculeze b_5.
23. Să se determine suma primilor 8 termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și $q = -1$
24. Să se calculeze suma $1+2+2^2+\ldots+2^5$.
25. Să se determine $x \in \Re$ știind că 3*x*-1; *x*+3; 9-*x* sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
26. Să se determine al patrulea termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$știind că primul termen este 2 iar al doilea termen este 6.
27. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 = 2$ și $b_2 = -4$. Să se calculeze b_6.

28. Să se calculeze suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^7}$.
29. Să se determine $x \in \Re$ știind că 3; 24; x sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
30. Determinați suma primilor 3 termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8 iar diferența dintre al doilea și primul termen este egală cu 4.
31. Fie progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termenii pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \ldots$ Calculați suma primilor nouă termeni ai progresiei.
32. Aflați $x \in (0, \infty)$ astfel încât 3, $2x+1$, 27 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
33. Determinați rația unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $b_1 = 1$ și $b_5 = 8$.

Rezolvări:

Breviar Teoretic: Funcția de gradul I

Definiţie. Reprezentare grafică

Funcţia $f:\Re \to \Re, f(x)=ax+b,\ a,b\in \Re$, se numeşte ***funcţie afină***.

- dacă $a\neq 0$, atunci *f* se numeşte ***funcţie de gradul I de coeficienţi a,b***;
- dacă $a\neq 0\, iar\, b=0$, atunci *f* se numeşte ***funcţie liniară*** ($f(x)=ax$);
- dacă $a=0$, atunci *f* se numeşte ***funcţie constantă*** ($f(x)=b$).

Reprezentarea grafică a funcţiei

$f:\Re \to \Re, f(x)=ax+b, a\neq 0$

Observaţii

1) Graficul funcţiei de gradul I este o ***dreaptă***. Ecuaţia dreptei este $y=ax+b,\ a\neq 0$.

2) Dreapta ce reprezintă graficul funcţiei de gradul I taie axa Ox şi face cu aceasta unghiul α. Coeficientul $a=tg\alpha$ se numeşte ***panta dreptei (coeficientul unghiular)***. Ex: Dreapta ce reprezintă graficul funcţiei $f:\Re \to \Re\ f(x)=-3x+\sqrt{5}$ are coeficientul unghiular $a=tg\alpha=-3$.

3) Deoarece orice dreaptă este bine determinată dacă se ştiu două puncte distincte ale sale, pentru a trasa graficul funcţiei de gradul I se vor afla cele două puncte. De obicei, aceste puncte sunt ***punctele de intersecţie ale graficului cu axele de coordonate***.

Deci, pt. a putea trasa fraficul unei funcţii de gradul I, vom afla intersecţiile acestuia cu axele de coordonate.

Intersecția cu axele de coordonate

$$\boxed{A(x,y)\in G_f \Leftrightarrow f(x)=y}$$

$G_f \cap Ox = A(x,0)$ - rezolvăm $f(x)=0 \Rightarrow ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a} \Rightarrow A\left(-\frac{b}{a},0\right)=G_f\cap Ox$

$G_f \cap Oy = B(0,y)$ - rezolvăm $f(0)=y \Rightarrow a\cdot 0+b=y \Rightarrow y=b \Rightarrow B(0,b)=G_f\cap Oy$

<u>Exemplu de aplicație:</u>

Se consideră funcția $f:\Re \to \Re\ f(x)=-3x+6$. Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficului funcției *f* cu axa Ox.

Rezolvare: $G_f \cap Ox = A(x,0) \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow -3x+6=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,0)=G_f\cap Ox$.

Punctul de intersecție a graficelor a două funcții - se rezolvă ecuația $f(x) = g(x)$.

Exemplu de aplicație:

Se consideră funcțiile $f, g : \Re \to \Re\ f(x) = 5x - 4$ și $g(x) = 2x + 5$ Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficului funcției *f* cu graficul funcției *g*.

Rezolvare:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 5x - 4 = 2x + 5 \Rightarrow 5x - 2x = 5 + 4 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$
$$f(3) = 15 - 4 \Rightarrow f(3) = 11 \Rightarrow G_f \cap G_g = A(3,11)$$

Semnul funcției de gradul I

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$	Semn contrar *a*	0	Semn *a*	

Monotonia funcției de gradul I

f crescătoare dacă $a > 0$

f descrescătoare dacă $a < 0$

Rezolvarea inecuațiilor

$$ax + b \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{b}{a}\ daca\ a > 0\ \ sau\ \ x \leq -\frac{b}{a}\ daca\ a < 0.$$

$$ax + b \leq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{b}{a}\ daca\ a > 0\ \ sau\ \ x \geq -\frac{b}{a}\ daca\ a < 0.$$

Obs. Mulțimea soluțiilor unei inecuații de gradul I cu o necunoscută reprezintă un interval semimărginit al mulțimii numerelor reale, iar din punct de vedere geometric este o semidreaptă a axei

Exemplu de aplicație: Să se rezolve inecuația:

a) $3x - 6 \geq 0$

Rezolvare: $3x - 6 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 6 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, \infty)$

b) $\frac{2x-4}{-x+3} \geq 0$

Rezolvare:

$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$

$-x+3=0 \Rightarrow x=3$

Întocmim tabelul de semne:

x	$-\infty$ 2 3 ∞
$2x-4$	- - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + +
$-x+3$	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + 0 - - - - - - - -
$\frac{2x-4}{-x+3}$	- - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + | - - - - - - - -

Deci $x \in [2,3)$

Aplicații:

Funcția și ecuația de gradul I

1. Fie funcția $f:\Re \to \Re$, $f(x)=ax+5, a\in \Re^*$ Să se determine a știind că $A(-2,1)\in G_f$.
2. Se consideră funcția $f:\Re \to \Re$, $f(x)=-2x+6$
   a) Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele *Ox* și *Oy*.
   b) Să se reprezinte grafic funcția.
3. Fie funcția $f:\Re \to \Re$, $f(x)=-2x+5$. Să se calcuze aria suprafeței plane limitate de axele de coordonate și graficul funcției.
4. Se dau funcțiile $f,g:\Re \to \Re$ $f(x)=ax+b-9,\ g(x)=2bx-a, a,b\in \Re$. Să se determine *a* și *b* știind că punctul *A*(2,3) aparține graficelor celor două funcții.
5. Rezolvați în $\Re$ ecuația: $\frac{x}{2}-\frac{2(x-1)}{3}+\frac{3(x-2)}{4}-\frac{4(x-3)}{6}=\frac{1}{6}-\frac{x-5}{2}$.
6. Să se studieze monotonia funcțiilor $f,g:\Re \to \Re$ $f(x)=-3x+6,\ g(x)=2x-8$.
7. Să se studieze monotonia funcției $f,g:\Re \to \Re$ $f(x)=(3-m)x+2, m\in \Re$.
8. Să se determine semnul funcției $f:\Re \setminus \{2\} \to \Re$, $f(x)=\frac{-3x}{x-2}$.
9. Fie $f:\Re \to \Re$, $f(x)=3x$. Determinaţi $m\in \Re$, astfel încât punctul:
   a) $A(m,7)\in G_f$, b) $B(m,-4)\in G_f$.
10. Determinaţi punctele de intersecţie ale reprezentării graficului funcţiei $f:\Re \to \Re$ cu axele de coordonate Ox, Oy: a) $f(x)=x\sqrt{2}-2$; b) $f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$.

Inecuații de gradul I

Să se rezolve următoarele inecuații pe mulțimea $\Re$:

1. $15x-5\leq 0$
2. $21-7x\geq 0$
3. $5(x-3)-(x+1)>2(x-2)+10$
4. $5(2-x)\leq 7x-14$
5. $\frac{2x-1}{3}+2<\frac{x-5}{6}$
6. $\frac{1-3x}{4}+\frac{1}{2}>x-1$
7. $(x-1)(1-3x)>0$
8. $(x-2)(4-3x)<0$
9. $\frac{x-1}{x+2}\leq 0$
10. $\frac{3x}{x-1}<-1$
11. $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{x-1}{x+1}<\frac{1}{2}$
12. $\frac{3x-2}{5-3x}>1$
13. $\frac{(x-1)(-x+2)}{-2x+7}\leq 0$

Rezolvări:

<u>Breviar Teoretic: Vectori</u>

Vector = mulțimea segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat dat

<u>Not</u>. $\overrightarrow{AB}$ sau $\vec{u}, \vec{v}$ etc.

<u>Vectori egali</u>: au aceeasi direcție (dreptele suport sunt fie pe aceeași dreaptă, fie pe drepte paralele), aceeași lungime și același sens.

<u>Vectori opuși</u>: au aceeasi direcție, aceeași lungime și sens opus. ($\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, unde $\vec{0}$ este vectorul nul – originea coincide cu extremitatea)

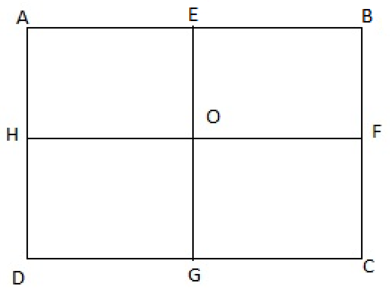
<u>Adunarea a doi vectori:</u>

<u>1. Regula triunghiului</u> : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

<u>2. Regula paralelogramului:</u> $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, unde ABDC paralelogram

<u>Vectori coliniari:</u> doi vectori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sunt coliniari dacă $\exists k \in \Re\ a.i\ \ \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$; dacă $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sunt coliniari atunci și *A*, *B*, *C* sunt puncte coliniare.

Exemplu de aplicație: 1. Se dă figura:



Să se calculeze: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$; $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FE}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Regula paralelogramului); $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AH}$ (Regula triunghiului);

$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{OC}$ (se caută un vector egal cu $\overrightarrow{EB}$ care sa aiba originea fie în *G*, fie în *O*)

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$.

2. Se consideră triunghiul echilateral *ABC* cu *O* centrul cercului circumscris triunghiului. Arătați că

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Rezolvare: ΔABC echilateral $\Rightarrow O$ este și centrul de greutate

Fie $D\in BC$, D mijlocul segmentului BC $\Rightarrow AD$ înalțime și mediană $\Rightarrow \overrightarrow{OA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$. (1)

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OR}$ (regula paralelogramului) $\Rightarrow OBRC$ paralelogram $\Rightarrow D$= intersecția diagonalelor $\Rightarrow \overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OD}$. Cum $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{OR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD})=\vec{0}$

Aplicații:

1. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, știind că *A,B,C* sunt vârfurile unui triunghi.

2. Dacă $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.

3. Fie ΔABC echilateral, înscris într-un cerc de centru O. Să se calculeze $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AO}$.

4. În triunghiul *ABC* punctele *M*, *N*, *P* sunt mijloacele laturilor *AB*, *BC*, respectiv *AC*. Să se arate că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}$.

5. Triunghiul *ABC* are centrul de greutate *G*. Dacă punctul *M*, este mijloacul segmentului *BC*, să se determine numărul real *a* astfel încât $\overrightarrow{AG}=a\overrightarrow{MA}$.

6. Fie triunghiul echilateral *MNP* înscris într-un cerc de centru *O*. cercului circumscris Să se demonstreze că: $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

7. Să se demonstreze că în patrulaterul *MNPQ* are loc relația $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$.

8. Se consideră pătratul *ABCD* de centru *O*. Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

9. Se consideră paralelogramul *ABCD.* Să se demonstreze că $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$.

Rezolvări: