

Suport de curs pentru clasa a X-a

Matematica

Cuprins:

1. Ecuații iraționale
2. Ecuații exponențiale
3. Ecuații logaritmice

Ecuatii iraționale

Noțiuni teoretice	Aplicații
Definiție Se numește ecuație irațională o ecuație în care necunoscuta se află sub unul sau mai multe semne radical. Etapele de rezolvare a ecuațiilor iraționale 1) Stabilirea condițiilor de existență a radicalilor de ordin par, respectiv, a domeniului D de existență a soluțiilor ecuației. 2) Rezolvarea ecuației după eliminarea radicalilor. Observație: Eliminarea radicalilor dintr-o ecuație irațională se poate face prin diferite transformări, cum ar fi: notații, substituții, ridicare la putere, amplificarea cu expresia conjugată etc. 3) Verificare soluțiilor; stabilirea mulțimii S a soluțiilor ecuației date. 4) Scrierea mulțimii S a soluțiilor ecuației date. Exemple: 1) $\sqrt{x} = 3$; $D = [0, \infty)$, $x = 9 \in D$, $S = \{9\}$; 2) $\sqrt[3]{x} = 2$; $D = \mathbb{R}$, $x = 8 \in \mathbb{R}$, $S = \{8\}$; 3) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$; $D = [0, \infty)$, $(\sqrt[3]{x})^3 = (2 - \sqrt{x})^3 \Rightarrow$	1. Să se rezolve ecuațiile: a) $\sqrt{2x - 1} = 3$; b) $\sqrt[3]{2x - 1} = 3$; c) $\sqrt{2x + 3} = 4x$; d) $\sqrt[3]{x + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; e) $\sqrt{3 - x} = -2x$; f) $\sqrt{x^2 - 3} = 3 - x$; g) $\sqrt[3]{x^3 - 7} = x - 1$; h) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 1 - x$.

$\Rightarrow (x-1)(x^2+64)=0 \Rightarrow x_1=1 \in D, x_{2,3} \notin R;$ $S = \{1\}.$	2. Să se rezolve ecuațiile: a) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 2;$ b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2-x} = 2;$ c) $2\sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{7-x};$ d) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8;$ e) $\sqrt{x+7} + \sqrt{3x-2} = 5;$ f) $\sqrt{x+8} + 2 = \sqrt{5x+20}.$
--	--

ECUAȚII EXPONENȚIALE

1. Ecuații exponențiale de forma:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad a > 0, a \neq 1$$

Metodă de rezolvare

Ecuația este echivalentă cu ecuația $f(x) = g(x)$. Soluțiile acestei ecuații sunt și soluții ale ecuației date.

Probleme:

Să se rezolve ecuațiile:

a. $3^{2x+1} = 3^{-x^2}$

$$b. 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 225$$

Ecuatii exponențiale de forma:

$$c_1 a^{2f(x)} + c_2 a^{f(x)} + c_3 = 0, a > 0, a \neq 1$$

Metodă de rezolvare:

Ecuatiile de acest tip se rezolvă prin substituție.

Se notează $a^{f(x)} = y > 0$ și se obține ecuația de gradul al doilea în y , $c_1 y^2 + c_2 y + c_3 = 0$ cu soluțiile y_1, y_2 .

Ecuatiile $a^{f(x)} = y_i, i = 1, 2$ au soluții dacă $y_i > 0$.

În general ecuația de forma $f(a^x) = 0$ se rezolvă substituind $a^x = y > 0$ și apoi rezolvând ecuațiile exponențiale $a^x = y_i$, unde y_i sunt soluțiile ecuației $f(y) = 0$.

În final reuniunea acestor soluții reprezintă mulțimea de soluții pentru ecuația dată.

Probleme:

Să se rezolve ecuațiile exponențiale:

$$a. 4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$b. 25^{-x} + 5^{-x+1} - 50 = 0$$

$$c. 3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$$

Soluții:

a. Se aduce ecuația la forma echivalentă

$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \text{ și se notează } 2^x = y > 0.$$

Ecuația devine $y^2 - 9y + 8 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 1, y_2 = 8$. Revenim la substituție și rezolvăm ecuațiile $2^x = 1, 2^x = 8$.

Prima ecuație are soluția $x = 0$, iar a doua ecuație are soluția $x = 3$. Deci soluțiile ecuației date sunt $x_1 = 0, x_2 = 3$.

Ecuatii exponențiale de forma:

$$c_1 a_1^{2f(x)} + c_2 a_2^{2f(x)} + c_3 (a_1 \cdot a_2)^{f(x)} = 0$$

, $a_i > 0, a_i \neq 1$

Metodă de rezolvare:

O ecuație de acest tip o numim omogenă, deoarece fiecare termen al ecuației în a_1 și a_2 are exponentul același $2f(x)$. Pentru a rezolva astfel de ecuații se recomandă împărțirea ambilor termeni ai ecuației prin $a_2^{2f(x)}$ când se obține ecuația echivalentă:

$$c_1 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{2f(x)} + c_3 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{f(x)} + c_2 = 0$$

care este de tipul 4.

Se poate împărți ecuația prin $(a_1 a_2)^{f(x)}$ când obținem:

$$c_1 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{f(x)} + c_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{f(x)} + c_3 = 0$$
 care este o ecuație de tipul 5.

Probleme:

Să se rezolve ecuațiile:

a. $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 26 \cdot 81^x$

b. $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$

Soluții:

a. Ecuația se scrie echivalent:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4^{2x} + 37 \cdot 6^{2x} &= 26 \cdot 9^{2x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{2x} + 37 \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^x - 26 &= 0 \end{aligned}$$

ultima ecuație dedusă din precedenta prin împărțire cu 9^{2x} .

Ecuațiile exponențiale cu soluție unică.

Metodă de rezolvare:

Rezolvarea acestor ecuații constă în a le aduce la forma:

$f(x) = c$ unde f este o funcție strict monotonă, iar c este o constantă și observând că ecuația are o soluție în x_0 .

Cum f este strict monotonă se deduce că f este injectivă și deci ecuația dată are soluția unică x_0 .

Probleme:

a. $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$

b. $4^x + 9 = 5^x$

Soluții:

a. Să observăm că $x = 3$ verifică ecuația deoarece $3^2 + 5^2 = 34$.

Funcția $f(x) = 3^{x-1} + 5^{x-1}$ fiind suma a două funcții exponențiale cu baze supraunitare este strict crescătoare.

Deci $x = 3$ este soluție unică a ecuației.

b. În acest caz se împarte ecuația prin $5^x (\neq 0)$ și aceasta se scrie echivalent.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x + 9\left(\frac{1}{5}\right)^x = 1$$

Se vede că $x = 2$ este soluție a ecuației.

Funcția $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x + 9\left(\frac{1}{5}\right)^x$ este strict descrescătoare, fiind suma a două astfel de funcții.

Deci ecuația are soluția unică $x = 2$.

9.ECUAȚII LOGARITMICE

1). Ecuații logaritmice simple. $\log_a x = b$

se folosește definiția logarimului.

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -1 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; \quad x \in \{2\}$$

$$\lg x = -3 \Leftrightarrow x = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001; \quad x \in \{0,001\}$$

$$\log_{\frac{3}{4}} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81; \quad x \in \{81\}$$

$$\log_2 x = -1 \Leftrightarrow x = (2)^{-1} = \frac{1}{2}; \quad x \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Succes!

Ecuatii ce conțin funcții logaritmice în baze diferite.

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6, x \in \mathbb{R}$$

Aducem toți logaritmi la aceeași bază folosind formula $\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$

$$\left. \begin{aligned} \log_{\sqrt{x}} x &= \frac{\log_3 x}{\log_3 \sqrt{x}} = \frac{\log_3 x}{\frac{1}{2} \log_3 x} = 2 \\ \log_{\frac{1}{3}} x &= \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 x}{0 - \log_3 3} = \frac{\log_3 x}{-1} = -\log_3 x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \log_3 x + 2 + \log_3 x = 6 \Leftrightarrow 2 \log_3 x = 4 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2; \underline{x \in \{9\}}$$

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6$$

$$2 \log_4 x + 2 \log_x 4 = 5, x \in (0; \infty) \setminus \{1\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \log_4 x + 2 \log_x 4 &= 5 \\ \log_x 4 &= \frac{\log_4 4}{\log_4 x} = \frac{1}{\log_4 x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \log_4 x + \frac{2}{\log_4 x} &= 5 \\ t &= \log_4 x \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2t + \frac{2}{t} = 5 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0; t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x = \frac{1}{2} \\ \log_4 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4^{\frac{1}{2}} = 2 \\ x = 4^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \underline{x \in \{2; 16\}}$$

E2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_4 x = 2$;

b) $\lg(x-1) = -1$;

c) $\log_{\frac{1}{4}}(7x+1) = \log_9 27$;

d) $\log_3 \left(3^{x^2-13x+28} + \frac{2}{9} \right) = \log_3 0,2$;

e) $\log_{x+1} 5 = 1$;

f) $\log_{x+2}(2x^3 + 5x + 2) = 1$;

g) $\log_{x-1}(2x^2 - 7x + 1) = 2$;

h) $\log_{x+1}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$.

E3. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_x(x+2) = \log_x(3-x)$;

b) $\log_x(3x^2 + 2x) = \log_x(6-3x)$;

c) $\log_{x-1}(x^2 + 5x + 8) = \log_{x-1} 2(x+3)$;

d) $\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{7+x}{10}\right) = \log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{2}{x+6}\right)$.

E4. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\lg^2 x + 4\lg x + 3 = 0$;

b) $\frac{1}{6}(\lg x)^2 - \frac{5}{12}\lg x - 1 = 0$;

c) $2\lg^3 x + 3\lg^2 x - 2\lg x = 0$;

d) $\lg^2(x-2)^2 + \lg(x-2) - 5 = 0$;

e) $(9\lg^2 x - 1)(\lg^2 x^3 + 1) = 80$;

f) $\log_2(\log_2(x-10)) = 1$.

A1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\lg(x^2 - 6x + 5) - \lg(3 - x) = \lg 3;$

b) $\lg(2x + 6) - 2\lg(2x - 3) = 1;$

c) $\lg(x - 5) + \lg(x + 4) = \lg 2 + \lg 5;$

d) $\lg(x + 9) - 2 = \frac{1}{2}\lg(2x + 3) - \lg 25;$

e) $\log_5 \frac{4x^2 - 1}{3 - x} + \log_5 \frac{3 - x}{9 + 3x} = 0;$

f) $\log_3(6 - x) + 2\log_3 \sqrt{4 - x} = 1;$

g) $\log_2(x^2 - 2) - \log_2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 1;$

h) $3 + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{32}{x + 4}\right) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - x);$

i) $\frac{1}{2}\log_2(x^2 + x + 2) - \log_2(3x - 2) = 1;$

j) $\log_3\left(3^{3x^2 - 16x + 18} + \frac{2}{9}\right) = \log_4 0,25.$

c) $\log_{9x} 3 \cdot \log_{\frac{x}{9}} 3 = \log_{\frac{x}{81}} 3;$

d) $\frac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}(x + 1)^2 = 1 + \log_6 \frac{x + 5}{x + 9};$

e) $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(-3 + 2^{x+1});$

f) $\log_4\left(2\log_3\left(1 + \log_2\left(1 + 3\log_2 x\right)\right)\right) = \frac{1}{2};$

g) $2 + \log_3(2^x - 2) = \log_3 2 + \log_3(4^{x-1} - 1);$

h) $\log_4(2 \cdot 2^x + 1) = -x \log_9 3.$

A3. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\log_{\frac{2}{3}} 4x + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8;$

b) $x^{2\lg^2 x - 1,5\lg x} = \sqrt{10};$

c) $(0,2)^{\log_{\frac{1}{2}} 2 - 2x} - 5^{x + 3\log_4 2} = 10;$

d) $x^{3\lg x} = 10x^2;$

e) $10^{(6\log_x 10)^2 - 13} \cdot x^{\lg x} = 1;$

ECUATII EXPONENTIALE SI ECUATII LOGARITMICE

Nr crt	Exercitiul
1	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $9^x=27^{x+1}$
2	Sa se determine numarul real x pentru care $\log_3(3+x)=3$
3	Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatia: $\log_9x=2$
4	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia : $3^{x^2} - 9^x = 0$
5	Sa se determine numarul natural n daca $2^{2n-1} = 32$
6	Sa se determine numarul real pozitiv a daca $\log_4 9 = \log_2 a$
7	Sa se calculeze partea intreaga a numarului $\log_2 6$
8	Sa se calculeze $\log_3 2 + \log_3 12 - \log_3 8$
9	Sa se determine numarul real x pentru care $\log_4(3+x)=2$
10	Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatia: $\log_5x=\log_5(x^2-x+1)$ Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $9^x-3^x=6$
11	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $3^{x^2} = 81$
12	Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatia: $\log_5x=\log_5(2x-1)$ Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $2^{2x+1}=8^x$
13	Sa se determine $x \in (0, \infty)$ pentru care $\log_3 2 + \log_3 x = 1$

	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $9^x=27$
14	Sa se calculeze expresia: $\log_2 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{1}{3}$ Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatie: $\log_3(x^2+5)=2$
15	Sa se calculeze suma solutiilor ecuatiei: $\log_2(x^2+3)=2$
16	Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatie: $\log_2 x = \log_4 x$ Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $2^x=4^x$
17	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $25^{2x+1} \cdot 5^{2007} = 0$
18	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $\log_2(2x^2+7) = \log_2(x^4+8)$
19	Sa se dea un exemplu de numar intreg x pentru care $4^x < \frac{1}{4}$ Sa se determine numerele naturale y pentru care $3 < \log_2 y < 4$
20	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $\log_x 4 = 2$
21	Sa se calculeze $\log_2 8$
22	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $6^x = 7^x$ Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatie: $\log_7 x = 0$
23	Sa se arate ca $\log_2 3 - \log_2 6 \in \mathbb{Z}$
24	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 = 0$ Sa se arate ca $\log_2(\log_3 9) \in \mathbb{Z}$

25	Sa se determine $x \in Q$ pentru care $4^x = 8$
26	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $16^x = 32^x$ Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatia: $\log_{10}x=2$
27	Sa se determine solutiile reale ale ecuatiei: $3^{-2x-1} = 3^{x^2}$
28	Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatia: $\log_2x=-1$
29	Sa se calculeze $\log_2 4 + \log_2 \frac{1}{4}$
30	Sa se calculeze $\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}}$
31	Sa se gaseasca solutiile reale ale ecuatiei: $3^{x^2+x} = 9$ Sa se arate ca numarul $\log_2 3 + \log_2 48 - \log_2 18$ este natural.
32	Sa se determine numarul real pozitiv x daca: $\lg x + \lg 2 = \lg 6$
33	Sa se arate ca numarul $\lg 1000$ este natural.
34	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $4^x = 8^x$
35	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $4^x - 32 = 0$
36	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $10^x = 100$ Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatia: $\log_5 (x+1) = \log_5 (x^2+x)$
37	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatia: $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$

38	Sa se dea un exemplu de numer real $x \geq 3$ pentru care $\log_2 x \leq 4$
39	Sa se dea un exemplu de numere reale a si b pentru care $\log_8(a-1) - \log_8(b+1) = 0$
40	Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $\log_2(x^2+7) = \log_2(2x^2+3x+7)$
41	Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatie: $\log_3 x = -2$ Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $9^x - 3 = 0$
42	Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatie: $\log_5 x^2 = 1$ Sa se rezolve in multimea numerelor reale ecuatie: $16^x - 64 = 0$
43	Sa se rezolve in multimea numerelor reale strict pozitive ecuatie: $\log_8 x = 3$

TEST DE EVALUARE

ECUAȚII IRAȚIONALE; ECUAȚII LOGARITMICE; ECUAȚII EXPONENȚIALE

SUBIECTUL I: Exersare – 70 puncte

- 1.) (10 puncte) Să se rezolve în R ecuația: $\sqrt[3]{x^2 - x - 3} = (-1)$.
- 2.) (10 puncte) Să se rezolve în R ecuația: $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$.
- 3.) (10 puncte) Să se rezolve în R ecuația: $\log_3 \sqrt[3]{2x + 1} = 1$.
- 4.) (10 puncte) Să se rezolve în R ecuația: $(0,5)^{x^2 - 4} = 0,125$.
- 5.) (10 puncte) Să se rezolve în R ecuația: $\log_2 x + \log_8 x = 8$.
- 6.) (10 puncte) Să se rezolve în R ecuația:
$$3^{2x} - 3^{2x+1} + 3^{2x} - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0.$$
- 7.) (10 puncte) Să se rezolve în R ecuația:
$$\lg(x + 1) - \lg(4x + 1) = \lg(1 - x).$$

SUBIECTUL II: Sinteză – 20 puncte

- 1.) (10 puncte) Să se rezolve în R ecuația:

$$\log_2 \frac{x-1}{x+1} + 2\log_2 \frac{x-7}{x-1} = 1.$$

- 2.) (10 puncte) Să se rezolve în R ecuația:

$$\sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}} + \sqrt{2x+4-6\sqrt{2x-5}} = 2.$$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 50 minute.

Se acordă **10 puncte** din

oficiu.