
Suport de curs pentru clasa a X-a, liceu-sem II

Matematică

Cuprins:

Capitolul III. Metode de numărare

Capitolul IV. Matematici financiare

Capitolul V. Geometrie

Capitolul III. Metode de numărare

Breviar teoretic

Elemente de combinatorică.

Mulțime: $M = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$. **Mulțime ordonată:** $M = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ - mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, n \in \mathbb{N}$	$1! = 1$	$0! = 1$	$n! = (n-1)! \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$
--	----------	----------	---

Fie M o mulțime cu n elemente.

Aranjamente de n elemente luate câte k - orice submulțime ordonată a mulțimii M , având fiecare câte k elemente, $0 \leq k \leq n$.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 \leq k \leq n$	- numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k .
--	---

Permutări de n elemente - aranjamente de n elemente luate câte n (orice mulțime ordonată de n elemente ale mulțimii M).

$P_n = n!$	- numărul permutărilor de n elemente.
------------	---

Combinări de n elemente luate câte k - orice submulțime a mulțimii M , având fiecare câte k elemente, $0 \leq k \leq n$.

$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, 0 \leq k \leq n$	- numărul combinațiilor de n elemente luate câte k .
---	--

Formula de recurență pentru calculul numărului de combinări

Pentru orice $k, n \in \mathbb{N}$ cu $0 \leq k < n$ este adevărată egalitatea:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

Proprietăți: 1) $C_n^m = C_n^{n-m}, 0 \leq m \leq n; m, n \in \mathbb{N}$	2) $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}, 0 \leq m < n; m, n \in \mathbb{N}$
--	---

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n, n \in \mathbb{N}$ - numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi de n elemente.
--

4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$
--

Binomul lui Newton

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$
--

$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k; k = 0, 1, 2, \dots, n$ - formula termenului de rang $(k+1)$ al dezvoltării binomului lui Newton.
--

Proprietăți: 1) $C_n^m = C_n^{n-m}$, $0 \leq m \leq n$; $m, n \in \mathbb{N}$ 2) $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$; $0 \leq m < n$; $m, n \in \mathbb{N}$

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ - numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi de n elemente.

4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$

Binomul lui Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$$

$$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - \text{formula termenului de rang } (k+1) \text{ al dezvoltării binomului lui Newton.}$$

Triunghiul lui Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\ & 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C_0^0 & (a+b)^0 = 1 \\ C_1^k & (a+b)^1 = a+b \\ C_2^k & (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ C_3^k & (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ C_4^k & (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ C_5^k & (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ . & \\ . & \Rightarrow \text{Suma coeficienților binomiali } C_n^k, 0 \leq k \leq n, \text{ este egală cu } 2^n. \\ . & \Rightarrow \text{Suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu suma} \\ & \text{coeficienților binomiali de rang impar și este } 2^{n-1}. \end{array}$$

Formulele înmulțirii prescurtate

$$\begin{array}{lll} \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \end{array} & \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \\ a^4 + b^4 = (a^2 \pm b^2)^2 \mp 2a^2b^2 \end{array} & \begin{array}{l} (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\ a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) \end{array} \\ \begin{array}{l} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \end{array} & & \begin{array}{l} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{array} \\ \begin{array}{l} a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \\ a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n - \text{impar}, n \geq 3 \end{array} & & \end{array}$$

ELEMENTE DE COMBINATORICA

1. Câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2,4,6,8\}$
2. Câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1,3,5,7,9\}$
3. Să se rezolve ecuația $C_n^8 = C_n^{10}$, $n \geq 10$.
4. Să se arate că $C_{17}^3 > C_{17}^{15}$.
5. Să se determine x , $x \geq 2$, astfel încât $C_x^2 + A_x^2 = 30$.
6. Să se calculeze $C_{16}^0 + C_{16}^2 + C_{16}^4 + \dots + C_{16}^{16}$.
7. Să se determine n , $n \geq 2$, astfel încât $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$.
8. Să se determine x , $x \geq 3$ știind că $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$.
9. Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + \dots + C_{11}^{10}$.
10. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

PROBABILITATE

Definiție. Probabilitatea unui eveniment este egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile (m) care realizează evenimentul și numărul cazurilor egal posibile (n).

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Aplicații

1. Se consideră mulțimea $A = \{1,2,3,\dots,10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A, care conțin elementul 1.
2. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a \neq b$.
3. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

-
5. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr ab din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a + b = 4$.
6. Care este probabilitatea ca, alegând un număr k din mulțimea $\{0,1,2,\dots,7\}$, numărul C_k^7 să fie prim.
7. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.
8. Să se determine probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{1,2,3,\dots,40\}$, numărul $2^{n+2} \cdot 6^n$ să fie pătrat perfect.
9. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{10,11,12,\dots,40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.
10. Fie mulțimea $M = \{1,2,3,4,5,6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile mulțimii M , aceasta să aibă 2 elemente.

INDUCȚIE MATEMATICĂ ȘI ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

În matematică există două tipuri de raționamente logice :

- **deductiv** (dintr-o propoziție cu caracter general se obțin propoziții cu caracter particular)
- **inductiv** (dintr-o propoziție cu caracter particular se obțin propoziții cu caracter general)

Deoarece generalizările se obțin prin verificarea câtorva cazuri particulare, metoda se numește inducție incompletă

Când se epuizează toate cazurile posibile metoda se numește inducție completă.

Metoda inducției matematice:

- PAS 1 (verificarea) – se verifică enunțul pentru un număr dat
- PAS2 (demonstrația)- se presupune propoziția dată ca fiind adevărată și dacă $P(k)$ adevărat iar $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ atunci $P(n)$ adevărată

Exerciții rezolvate

Exercițiul 1 Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că:

$$\bullet \quad 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

I) Etapa de verificare:

$$n=1 \Rightarrow 1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6}$$

$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

$$1 = \frac{6}{6}$$

$$1 = 1 \text{ adevărat}$$

$$n=2 \Rightarrow 1 + (1+2) = \frac{2(2+1)(2+2)}{6}$$

$$1 + 3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{6}$$

$$4 = \frac{24}{6}$$

II) Etapa de demonstrație

Presupunem că $P(k): „1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+k) = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}”$ este adevărată pentru orice număr natural nenul k și demonstrăm că $P(k+1): „1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+(k+1)) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}”$ este adevărată pentru orice număr natural nenul k .

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+k) + (1+2+3+\dots+(k+1)) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + (1+2+3+\dots+(k+1)) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \frac{3(k+1)(k+2)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

Deci presupunerea făcută este adevărată $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \text{ este adevărată pentru orice număr natural nenul } n.$$

Exercițiul 2

Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că:

$$\bullet \quad \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

I) Etapa de verificare:

$$n=1 \Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot 1 + 1}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \text{ adevărat}$$

$$n=2 \Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} = \frac{2}{4 \cdot 2 + 1}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{45} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{9}{45} + \frac{1}{45} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{2}{9} \text{ adevărat}$$

I) Etapa de demonstrație

Presupunem că $P(k)$: „ $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4k-3) \cdot (4k+1)} = \frac{k}{4k+1}$ ” este adevărată pentru orice număr natural nenul k și demonstrăm că $P(k+1)$: „ $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4k+1) \cdot (4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}$ ” este adevărată pentru orice număr natural nenul k .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4k-3) \cdot (4k+1)} + \frac{1}{(4k+1) \cdot (4k+5)} = \\ & = \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1) \cdot (4k+5)} = \frac{k(4k+5)}{(4k+1)(4k+5)} + \frac{1}{(4k+1) \cdot (4k+5)} = \\ & = \frac{4k^2 + 5k + 1}{(4k+1) \cdot (4k+5)} = \frac{4k^2 + 4k + k + 1}{(4k+1) \cdot (4k+5)} = \frac{4k(k+1) + (k+1)}{(4k+1) \cdot (4k+5)} = \frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1) \cdot (4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5} \end{aligned}$$

Deci presupunerea făcută este adevărată $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} = \frac{n}{4n+1} \text{ este adevărată pentru orice număr natural nenul } n.$$

Aplicații

1.) Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că pentru orice număr natural nenul n , sunt adevărate egalitățile:

$$a.) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad b.) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$c.) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2; \quad d.) \quad 1^2 - 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.) Să se calculeze sumele următoare și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formulele găsite:

$$a.) \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!; \quad b.) \quad \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!};$$

$$c.) \quad 1!(1^2 + 1 + 1) + 2!(2^2 + 2 + 1) + \dots + n!(n^2 + n + 1).$$

Indicație: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

3.) Să se rezolve ecuațiile:

$$a.) \quad \frac{(2n)!}{(2n-3)!} = \frac{20 \cdot n!}{(n-2)!}; \quad b.) \quad \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12 \cdot n!}{(n-2)!}.$$

4.) Să se rezolve inecuațiile:

$$a.) \quad \frac{(2n-1)!}{(2n-3)!} > 420; \quad b.) \quad \frac{(n-3)!}{(n-4)(n-3)} < 5000;$$

$$c.) \quad \frac{(n-3)!}{(n-5)!} < 360; \quad n \in \mathbb{N}; n \geq 2 \quad d.) \quad \frac{(2n)!}{n!} < 1000; \quad n \in \mathbb{N}; n \geq 2$$

5.) Să se calculeze:

$$a.) \quad \frac{A_n^5 + A_n^7}{A_n^6}; \quad b.) \quad \frac{A_n^{n-1} - P_n}{C_n^{n-2}};$$

$$c.) \quad \frac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{n-1}}; \quad d.) \quad \frac{A_{n+3}^n}{(n+2)A_{n+1}^{n-2}};$$

$$e.) \quad \frac{A_n^2 \cdot P_k - 2P_{k+1}}{P_{k+1}}; \quad f.) \quad \frac{A_{n+k}^{n-k+2} + A_{n+k}^{n-k+1}}{A_{n+k}^{n-k}};$$

$$g.) \quad \frac{A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}; \quad h.) \quad \frac{A_n^k \cdot P_{n-k}}{P_{k-1}}.$$

6.) Să se rezolve ecuațiile:

$$a.) \quad A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42 \cdot P_{n-2}; \quad b.) \quad A_7^n = m \cdot A_7^{n-1};$$

$$c.) \quad P_{n+2} = 182 A_n^{11}; \quad d.) \quad A_{n+1}^{k+1} \cdot P_{n-k} = 90 P_{n-1};$$

7.) Să se calculeze:

$$a.) \quad \frac{C_{n+k}^k \cdot P_k - A_{n+k}^k}{P_k}; \quad b.) \quad \frac{C_n^k - C_{n-2}^k - C_{n-2}^{k-2}}{C_{n-1}^{k-1}};$$

Caz particular: $n = 5; k = 4$.

Caz particular: $n = 5; k = 4$.

8.) Să se calculeze C_n^7 , dacă $C_{20}^n = C_{20}^{n+2}$.

9.) Să se rezolve ecuațiile:

$$a.) \quad 5C_n^3 = C_{n+2}^4; \quad b.) \quad 3C_{2n}^{n-1} = 5C_{2n-1}^n;$$

$$c.) \quad 13C_{2n}^{n+1} = 7C_{2n+1}^{n-1}; \quad d.) \quad C_{n+2}^4 = n^2 - 1;$$

$$e.) \quad C_{n+3}^{n+1} = n^2 - 4; \quad f.) \quad C_{7n}^{n^2-10} = C_{28}^2;$$

$$g.) \quad C_{n-1}^2 + C_{n-3}^2 + C_{n-4}^2 = 19;$$

$$h.) \quad C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 = 55;$$

$$i.) \quad 30C_{n-3}^{n-9} = 19A_{n-4}^4.$$

10.) Să se rezolve inecuațiile:

$$a.) \quad C_{2n}^7 > C_{2n}^5;$$

$$b.) \quad C_{19}^{k-1} < C_{19}^k;$$

$$c.) \quad C_{15}^{k-2} > C_{15}^k;$$

$$d.) \quad 5C_n^3 > C_{n+2}^4;$$

11.) Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$a.) \quad \begin{cases} 5A_x^y = 2A_{x+1}^y \\ 3C_x^y = 2C_x^{y-1} \end{cases}; \quad b.) \quad \begin{cases} A_{2y}^{3x} = 8A_{2y}^{3x-1} \\ 9C_{2y}^{3x} = 8C_{2y}^{3x-1} \end{cases}; \quad c.) \quad \begin{cases} A_{2x}^{y-2} = 8A_{2x}^{y-3} \\ 3C_{2x}^{y-2} = 8C_{2x}^{y-3} \end{cases}.$$

12.) Să se arate că:

$$a.) \quad \frac{C_2^1 + C_4^2 + C_6^3 + \dots + C_{2n}^n}{C_1^1 + C_3^2 + C_5^3 + \dots + C_{2n-1}^n} = 2; \quad b.) \quad \frac{C_2^1 \cdot C_4^2 \cdot C_6^3 \cdot \dots \cdot C_{2n}^n}{C_1^1 \cdot C_3^2 \cdot C_5^3 \cdot \dots \cdot C_{2n-1}^n} = 2^n;$$

$$c.) \quad C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \dots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^{k+1}.$$

13.) Să se calculeze:

$$a.) \quad C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \dots + C_n^2; \quad b.) \quad (C_2^2)^2 + (C_3^2)^2 + (C_4^2)^2 + \dots + (C_n^2)^2.$$

$$a.) \text{ termenul al optulea al dezvoltării } (2x + a)^{10};$$

$$b.) \text{ termenul din mijloc al dezvoltării } \left(\frac{1}{x} - \sqrt[3]{x} \right)^{14};$$

$$c.) \text{ cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării } \left(2\sqrt{a} - (b)^{\frac{1}{4}} \right)^{13}.$$

14.) Să se determine:

$$a.) \text{ termenul din dezvoltarea } (\sqrt{x} + \sqrt{a})^{14} \text{ care îl conține pe } x^6;$$

$$b.) \text{ termenul din dezvoltarea } (\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y^2})^{15} \text{ care îl conține pe } y^2;$$

$$c.) \text{ termenul din dezvoltarea } \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + a^{\frac{3}{4}} \right)^{17} \text{ care nu conține pe } a;$$

$$d.) \text{ termenul din dezvoltarea } \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt{\frac{a}{x}} \right)^{20} \text{ în care nu apare } x.$$

$$15.) \quad \text{Să se determine rangul termenului din dezvoltarea } \left(\sqrt[3]{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^{43} \text{ în care } x \text{ și } y$$

au puteri egale.

16.) Să se determine n , dacă coeficientul binomial al termenului de rang trei, al

$$\text{dezvoltării } \left(\frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{a}} \right)^n, \text{ este egal cu } 190.$$

$$17.) \quad \text{În dezvoltarea } \left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right)^n \text{ suma coeficienților binomiali ai primilor trei termeni este } 121. \text{ Să se găsească termenul în care nu apare } x.$$

TEST DE EVALUARE
INDUCȚIE MATEMATICĂ ȘI ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

SUBIECTUL I: Exersare – 70 puncte

- 1.) (10 puncte) Să se arate că numărul $X = \frac{8!}{3! \cdot 5!} - \frac{9!}{2! \cdot 7!}$ este natural.
- 2.) (10 puncte) Să se rezolve ecuația: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$; $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3.) (10 puncte) Să se rezolve ecuația: $A_n^3 = 20 \cdot \frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}$; $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$.
- 4.) (10 puncte) Să se dezvolte, după formula lui Newton, binomul la putere: $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^6$.
- 5.) (10 puncte) Să se determine termenul al cincilea al dezvoltării: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^9$.
- 6.) (10 puncte) Să se determine x , dacă termenul al treilea al dezvoltării $(x + x^{\lg x})^5$ este 10^6 .
- 7.) (10 puncte) Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea: $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{100}$.

Indicație: Se rezolvă inecuațiile: $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} > 1$, respectiv $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} < 1$.

SUBIECTUL II: Sinteză – 20 puncte

- 1.) (10 puncte) Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că pentru orice număr natural nenul n , sunt adevărate egalitatea:

$$\frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{4n(4n+4)} + \frac{1}{16(n+1)} = \frac{1}{16}.$$

- 2.) (10 puncte) Să se rezolve sistemul de ecuații:
$$\begin{cases} xC_{n-1}^k + \frac{n}{k}y = \frac{k+1}{n} \\ xC_{n-1}^{k-1} - \frac{n}{k+1}y = \frac{k}{n} \end{cases}$$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 50 minute.
Se acordă **10 puncte** din oficiu.

Capitolul IV. Matematici financiare

Procente

Pentru a calcula $p\%$ dintr-un număr a se efectuează produsul: $a \cdot p\%$

Dobândă simplă

1) Numim dobândă simplă, dobânda calculată asupra sumei depuse pe toată perioada depunerii (notată cu D). Se numește procent (rata dobânzii) dobânda care se plătește pentru suma de 100 lei (100 unități monetare) pe timp de un an (se not. cu p).

$$D_s = \frac{t \cdot S \cdot p}{100}$$

(S - suma inițială depusă la bancă, t - durata contractului)

Dobândă compusă

2) O sumă de bani este depusă cu o dobândă compusă, la sfârșitul primei perioade a plasamentului, dobânda simplă generată de sumă este adăugată la suma inițială, pentru a produce la rândul ei dobândă în perioada următoare (dobânda la dobândă).

$$S_f = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

(S_f - suma după n ani, S_0 - suma inițială depusă la bancă, p - procentul dobânzii)

TVA

TVA (taxa pe valoarea adăugată) este un impozit preluat de stat la vanzarea bunurilor către consumatorul final, stabilit și perceput de stat, asupra valorii adăugate în fiecare stadiu al producției și distribuției bunurilor materiale, sub formă de procent din prețul bunurilor.

Se disting două tipuri de calcul al TVA-ului (*considerat 24%, dar se calculează asemănător pentru alte valori ale TVA-ului, înlocuind 24 cu valorile dorite*)

- La adăugarea la prețul unui produs luat de la producător, spre vanzarea către cumpărătorul final:

$$TVA = \frac{24}{100} \cdot p,$$

unde p este prețul producătorului, eventual cu alte adaosuri.

- Calculul TVA-ului unui produs la raft, deci care conține deja TVA:

Probleme rezolvate cu procente

E1 Să se determine 25% din 96.000 lei, 12% din 450 kg, 18,5% din 120 de litri, 5% din 4.250 hm, 24 ‰ din 35,5 km

Amintim că

$$p\% \text{ din } N = p\% \cdot N$$

Avem

$$25\% \text{ din } 96.000 \text{ lei} = 25\% \cdot 96.000 = \frac{25^{(25)}}{100} \cdot 96.000 = \frac{1}{4} \cdot 96.000 = 24.000 \text{ lei}$$

$$12\% \text{ din } 450 \text{ kg} = 12\% \cdot 450 = \frac{12}{100} \cdot 450 = \frac{12}{10} \cdot 45 = \frac{540}{10} = 54 \text{ kg}$$

$$18,5\% \text{ din } 120 \text{ l} = 18,5\% \cdot 120 = \frac{18,5}{100} \cdot 120 = \frac{18,5}{10} \cdot 12 = \frac{222}{10} = 22,2 \text{ l}$$

$$5\% \text{ din } 4250 \text{ hm} = 5\% \cdot 4250 = \frac{5}{100} \cdot 4250 = \frac{21250}{100} = 212,50 \text{ hm}$$

$$24\text{‰} \text{ din } 35,5 \text{ km} = 24\text{‰} \cdot 35,5 = \frac{24}{1000} \cdot 35,5 = \frac{852}{1000} = 0,852 \text{ km}$$

E2 Să se compare:

a) 15% din 25.000 lei cu 25% din 15.000 lei

$$15\% \cdot 25.000 = \frac{15}{100} \cdot 25.000 = 15 \cdot 250 = 3750$$

$$25\% \cdot 15.000 = \frac{25}{100} \cdot 15.000 = 15 \cdot 250 = 3750$$

Ce observați? Dați exemple și voi de astfel de egalități!

b) 45% din 270.000 lei cu 27% din 450.000 lei

$$45\% \cdot 270.000 = \frac{45}{100} \cdot 270.000 = 45 \cdot 2700 = 121500$$

$$27\% \cdot 450.000 = \frac{27}{100} \cdot 450.000 = 27 \cdot 4500 = 121500$$

E3 După ce a cheltuit 40% din suma avută și încă 360.000 lei, unei persoane i-a rămas 30% din suma inițială. Care a fost suma inițială?

Notăm cu **S** suma inițială

$$\begin{array}{l} \text{" după ce a cheltuit 40% din suma avută " } \leftrightarrow 40\% \cdot S = \frac{40}{100} \cdot S = \frac{4S}{10} \\ \text{" și încă 360.000 lei " } \leftrightarrow \quad \quad \quad 360.000 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} + \\ \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\text{Cheltuieli} = \frac{4S}{10} + 360.000$$

I-a rămas $S - \left(\frac{4S}{10} + 360.000 \right) \stackrel{10)}{=} S - \frac{4S}{10} - 360.000 = \underline{\underline{\frac{6S}{10} - 360.000}}$

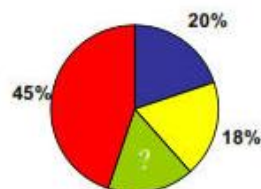
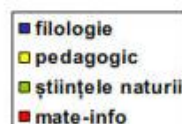
" i-a rămas 30% din suma inițială " $\leftrightarrow 30\% \cdot S = \frac{30}{100} \cdot S = \underline{\underline{\frac{3S}{10}}}$

Atunci avem ecuația : $\frac{6S}{10} - 360.000 = \frac{3S}{10}$ care se rezolvă

$$\frac{6S}{10} - 360.000 = \frac{3S}{10} \Leftrightarrow \frac{6S}{10} - \frac{3S}{10} = 360.000 \Leftrightarrow \frac{3S}{10} = 360.000 \left| \cdot \frac{10}{3} \right. \Leftrightarrow S = 1.200.000$$

E4 Repartizarea pe specializări a celor 1200 elevi ai unui liceu este redată în diagramă.

- Cât la sută din efectivul de elevi reprezintă profilul " științele naturii " ?
- Câți elevi sunt la fiecare profil ?



- a) În total avem 100%

Atunci numărul elevilor de la profilul științele naturii este

$$100\% - (45\% + 18\% + 20\%) = 100\% - 83\% = 17\%$$

- b)
- La mate-info sunt: $45\% \cdot 1200 = \frac{45}{100} \cdot 1200 = 540$ elevi
- La filologie sunt: $20\% \cdot 1200 = \frac{20}{100} \cdot 1200 = 240$ elevi
- La pedagogic sunt: $18\% \cdot 1200 = \frac{18}{100} \cdot 1200 = 216$ elevi
- La științele naturii sunt: $17\% \cdot 1200 = \frac{17}{100} \cdot 1200 = 204$ elevi

Verificare: $540 + 240 + 216 + 204 = 1200$

E5

O fermă agricolă are de arat 540 ha. Într-o primă etapă s-au arat 81 ha. Câte procente din întreaga suprafață au fost arate ?

540ha.....100%

81ha.....x%

$$x = \frac{81 \cdot 100}{540} = 15\%$$

E6

Într-o bibliotecă sunt 20.000 de cărți din care 16.000 sunt de literatură, iar 15 % din rest sunt de tehnică.

- Cât la sută din numărul total de cărți reprezintă cele de literatură ?
- Câte cărți de tehnică sunt în bibliotecă ?
- Cât la sută din totalul cărților reprezintă alte specialități decât cele menționate ?

- a) 20.000 carti.....100%

16.000 carti.....x%

$$x = \frac{16.000 \cdot 100}{20.000} = 80\%$$

- b) “ din rest ” înseamnă $20.000 - 16.000 = 4.000$ cărți din bibliotecă

$$15\% \cdot 4000 = \frac{15}{100} \cdot 4000 = 600 \quad \text{cărți de tehnică}$$

- c) alte specialități $20.000 - 16.000 - 600 = 3400$ cărți din bibliotecă

20.000 carti.....100%

3.400 carti.....x%

$$x = \frac{3.400 \cdot 100}{20.000} = 17\%$$

Probleme rezolvate cu dobândă simplă

E1 Ce dobândă simplă aduce un credit de 36 de milioane de lei pe o perioadă de un an, dacă rata dobânzii este de 24% ?

Avem $D_s = S_0 \cdot \frac{r}{100} \cdot n$ Așadar $D_s = 36 \cdot \frac{24}{100} \cdot 1 = 8,64$ milioane lei

E2 Care este rata dobânzii dacă un capital de 30 de milioane de lei generează în doi ani o dobândă simplă de 10.800.000 lei ?

$$D_s = S_0 \cdot \frac{r}{100} \cdot n \Leftrightarrow 10.800.000 = 30.000.000 \cdot \frac{r}{100} \cdot 2$$

atunci $10.800.000 = 600000 \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{10.800.000}{600000} = 18\%$

E3 a) Ce dobândă se acumulează la o depunere de 18 milioane de lei în regim de dobândă simplă pe o perioadă de 7 luni, dacă rata dobânzii este de 15% ?
b) Cât ar trebui să fie procentul majorare pentru ca suma de 18 milioane de lei să aducă în 5 luni o dobândă egală cu aceea obținută după 7 luni ?

a) $D_s = S_0 \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{t_{12luni}}{12} = 18 \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{7}{12} = 1.575$ mil.

$$D_s = S \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{t_{12luni}}{12}$$

b) Avem

$$D_s = 1.575 \text{ mil.}; S = 18 \text{ mil.}; t_{12luni} = 5$$

Atunci $1,575 = 18 \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{r}{100} = \frac{1,575 \cdot 12}{18 \cdot 5} = 0,21$

Așadar $r = 21\%$

E4 Ce procent de dobândă are o operațiune bancară dacă un capital inițial de 40 de milioane de lei va determina un capital final de 44.800.000 lei după un an ?

Avem $S_1 = 44.800.000; S_0 = 40.000.000$

$$\Rightarrow D_s = S_1 - S_0 = 44.800.000 - 40.000.000 = 4.800.000$$

$$D_s = S_0 \cdot \frac{r}{100} \cdot n \Leftrightarrow 4.800.000 = 40.000.000 \cdot \frac{r}{100} \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{r}{100} = \frac{4.800.000}{40.000.000} = 0,12$$

Așadar $r = 12\%$

- E5** Se plasează un capital de 125 de milioane de lei pe o durată de 150 de zile cu o rată a dobânzii de 17,4% în regim de dobândă simplă.
- a) Ce capital final se va înregistra la termenul scadent ?
- b) Câte zile trebuie să dureze plasamentul astfel încât să se obțină o dobândă de 3.625.000 lei ?

$$a) \quad D_s = S_0 \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{t_{360 \text{ zile}}}{360} = 125 \cdot \frac{17,4}{100} \cdot \frac{150}{360} = 9,0625 \text{ mil}$$

$$\text{Atunci capitalul final este: } S = S_0 + D_s = 125 + 9,0625 = 134,0625 \text{ mil}$$

$$b) \quad D_s = S_0 \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{t_{360 \text{ zile}}}{360} \Leftrightarrow 3.625.000 = 125.000.000 \cdot \frac{17,4}{100} \cdot \frac{t_{360 \text{ zile}}}{360} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_{360} = \frac{3.625.000 \cdot 100 \cdot 360}{125.000.000 \cdot 17,4} = 60 \text{ zile}$$

Probleme rezolvate cu TVA

- E1** Care este prețul de vânzare într-un magazin al unui frigider dacă cheltuielile de producție s-au ridicat la 8.250.000 de lei, iar procentul TVA este 19% ?

$$\text{Avem } P_{\text{prod}} = 8.250.000; \frac{P}{100} = \frac{19}{100}$$

$$P_{\text{vanzare}} = ?$$

$$\text{Atunci } TVA = \frac{P}{100} \cdot P_{\text{prod}} = \frac{19}{100} \cdot 8.250.000 = 1.567.500$$

$$P_{\text{vanzare}} = 8.250.000 + 1.567.500 = 9.817.500$$

$$P_{\text{vanzare}} = P_{\text{productie}} + TVA$$

$$TVA = \frac{P}{100} \cdot P_{\text{productie}}$$

- E2** Prețul de vânzare al unui storcător de fructe este de 2.499.000 lei. Care este prețul fără TVA dacă procentul TVA este 19% ?

$$\text{Avem } P_{\text{vanzare}} = 2.499.000; \frac{P}{100} = \frac{19}{100}$$

$$P_{\text{prod}} = ?$$

$$\text{Atunci } TVA = \frac{P}{100} \cdot P_{\text{prod}} = \frac{19}{100} \cdot P_{\text{prod}}$$

$$2.499.000 = P_{\text{prod}} + \frac{19}{100} \cdot P_{\text{prod}} \Leftrightarrow 2.499.000 = P_{\text{prod}} (1 + 0,19) \Leftrightarrow 2.499.000 = P_{\text{prod}} \cdot 1,19$$

$$\Leftrightarrow P_{\text{prod}} = \frac{2.499.000}{1,19} = 2.100.000$$

- E3** Diferența dintre prețul cu TVA și prețul fără TVA al unui obiect este de 47.500 lei. Să se determine prețul de vânzare al acestuia considerând procentul TVA de 19%.

Avem $P_{\text{vânzare}} - P_{\text{productie}} = 47.500$

$$\frac{p}{100} = \frac{19}{100}$$

$$P_{\text{vânzare}} = ?$$

$$P_{\text{vânzare}} = P_{\text{productie}} + TVA$$

$$TVA = \frac{p}{100} \cdot P_{\text{productie}}$$

Dar $P_{\text{vânzare}} = P_{\text{productie}} + TVA \Leftrightarrow P_{\text{vânzare}} - P_{\text{productie}} = TVA = 47.500$

$$TVA = \frac{p}{100} \cdot P_{\text{productie}} \Leftrightarrow 47.500 = \frac{19}{100} \cdot P_{\text{productie}}$$

$$\Leftrightarrow P_{\text{productie}} = \frac{47.500 \cdot 100}{19} = 250.000$$

$$P_{\text{vânzare}} = P_{\text{productie}} + TVA = 250.000 + 47.500 = 297.500$$

- E4** Într-un magazin o mașină de spălat are afișat prețul de 14.200.000 lei și lângă acest preț scrie TVA=2.556.000 lei. Care este prețul de cost al produsului și care este procentul TVA aplicat acestuia?

Avem $P_{\text{vânzare}} = 14.200.000$; $TVA = 2.556.000$

$$P_{\text{productie}} = ?, \frac{p}{100} = ?$$

$$P_{\text{vânzare}} = P_{\text{productie}} + TVA$$

$$TVA = \frac{p}{100} \cdot P_{\text{productie}}$$

Atunci

$$P_{\text{vânzare}} = P_{\text{productie}} + TVA \Leftrightarrow P_{\text{productie}} = P_{\text{vânzare}} - TVA = 14.200.000 - 2.556.000 = 11.644.000$$

$$TVA = \frac{p}{100} \cdot P_{\text{productie}} \Leftrightarrow 2.556.000 = \frac{p}{100} \cdot 11.644.000 \Leftrightarrow \frac{p}{100} = \frac{2.556.000}{11.644.000} = 0,22$$

$$p = 22\%$$

- E5** Un producător calculează pentru materiile prime necesare procesului de producție un TVA de 19%. Care este costul materialelor folosite dacă TVA este de 4.397.550 lei ?

Avem $TVA = 4.397.550$; $\frac{p}{100} = 19\%$

$$P_{\text{productie}} = ?$$

Atunci $TVA = \frac{p}{100} \cdot P_{\text{prod}} \Leftrightarrow 4.397.550 = \frac{19}{100} \cdot P_{\text{prod}} \Leftrightarrow P_{\text{prod}} = \frac{4.397.550 \cdot 100}{19} = 23.145.000$

FIȘĂ DE LUCRU

- 1.) După o reducere cu 20%, prețul unui produs este 320 lei. Să se determine prețul produsului înainte de reducere.
- 2.) O sumă de 1000 de lei a fost depusă la o bancă și după un an s-a obținut o dobândă de 80 lei. Să se calculeze rata dobânzii.
- 3.) După o reducere a prețului cu 15% un produs costă 510 lei. Să se calculeze prețul inițial al produsului.
- 4.) Să se determine dobânda simplă generată de un capital de 40000 lei pe o perioadă de 5 ani, dacă rata dobânzii este de 15%.
- 5.) Un produs se scumpește cu 20%. După un timp, produsul se ieftinește cu 20%. Comparați prețul final cu cel inițial.
- 6.) Un produs se ieftinește cu 10%. După un timp, produsul se scumpește cu 10%. Comparați prețul final cu cel inițial.
- 7.) După două ieftiniri succesive cu același procent, prețul unui produs este același cu cel care s-ar fi obținut în urma unei singure ieftiniri cu 36%. Care este procentul fiecăreia dintre cele două ieftiniri succesive ?
- 8.) Un produs se ieftinește de două ori succesiv, prima dată cu 20% , iar a doua oară cu 10%, ajungând în final să coste 180 lei.
 - a.) Determinați prețul inițial al produsului.
 - b.) Care este procentul total cu care s-a ieftinit produsul ?
- 9.) Un împrumut de 50000 lei, luat pe 10 ani cu o dobândă de 10%, trebuie rambursat în rate anuale egale. Care este valoarea fiecărei rate ?
- 10.) Aflați prețul cu care un client poate cumpăra un televizor, știind că TVA-ul reprezintă 114 lei din prețul acestuia.
- 11.) O factură are o valoare de 250 lei la care se adaugă 19% TVA.
 - a.) Determinați prețul întregii facturi (prețul inițial al facturii la care se adaugă prețul TVA-ului).
 - b.) Ce procent reprezintă suma adăugată ca TVA din suma totală ?

12.) Suma de 50000 lei este depusă la o bancă, într-un depozit cu capitalizare, pe termen de 8 ani, dobânda anuală fiind de 8%. Ce sumă se va afla în depozit la sfârșitul celor 8 ani ?

13.) Suma de 50000 lei este depusă la o bancă într-un depozit cu capitalizare, rata anuală a dobânzii fiind de 8%. Câți ani trebuie menținut depozitul, astfel încât valoarea lui să ajungă la 120000 lei ?

14.) Un profesor de matematică predă la două clase a X-a. Mediile obținute de elevii celor două clase în primul semestru sunt următoarele:

Media	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi (cls. a X-a A)	0	1	3	6	9	6	5
Nr. elevi (cls. a X-a B)	2	3	4	8	8	3	2

a.) Trasați poligonul frecvențelor pentru fiecare dintre cele două serii statistice.

b.) Calculați media fiecărei serii și comparați cunoștințele celor două clase la matematică.

c.) Calculați dispersia fiecărei serii și stabiliți care dintre cele două colective este mai omogen.

15.) În tabelul de mai jos este descrisă distribuția angajaților dintr-o societate comercială, în funcție de salariul (lei) pe care-l primesc:

Salariul lunar (x_i)	Număr salariați (n_i)	Procent din totalul salariaților (f_i)
[750,1000)	120	19,5
[1000,1250)		25
[1250,1500)		
[1500,2000)		21
[2000,5000)		4,5

a.) Completați coloana frecvențelor relative (f_i) și coloana frecvențelor absolute (n_i).

b.) Reprezentați seria statistică printr-o histogramă, apoi trasați poligonul frecvențelor.

16.) Se consideră seria statistică descrisă prin următorul tabel:

x_i	8	6	4	2
-------	---	---	---	---

n_i	1	3	5	7
-------	---	---	---	---

Calculați media aritmetică, media geometrică, media armonică și media pătratică pentru seria dată și comparați rezultatele obținute.

17.) Un profesor de matematică predă la două clase a X-a. Meiile obținute de elevii celor două clase în primul semestru sunt următoarele:

Media	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi (cls. a X-a A)	0	1	3	6	9	6	5
Nr. elevi (cls. a X-a A)	2	3	4	8	8	3	2

a.) Trasați poligonul frecvențelor pentru fiecare dintre cele două serii statistice.

b.) Calculați media fiecărei serii și comparați cunoștințele celor două clase la matematică.

c.) Calculați dispersia fiecărei serii și stabiliți care dintre cele două colective este mai omogen.

18.) În tabelul de mai jos este prezentată populația unei provincii după cultul religios practicat, între anii 1900 și 2000 :

Anul	Religia			Alte religii
	« Cultul I »	« Cultul II »	« Cultul III »	
1900	63700	8400	526	2374
1925	150000	40000	3500	5000
1950	209293	11580	11580	47801
1975	221726	51617	51617	67872
2000	273254	102919	102919	113644

a.) Descrieți, cu ajutorul unui tabel, seria cronologică ce dă populația religioasă totală în perioada 1900 și 2000 .

b.) Reprezentați grafic, într-o aceeași diagramă, seriile cronologice corespunzătoare populațiilor religioase, în perioada menționată.

c.) Reprezentați, cu ajutorul unor diagrame circulare, compoziția religioasă în anii 1900 , respectiv 2000 .

TEST DE EVALUARE

SUBIECTUL I: Exersare – 60 puncte

1.) a.) (5 puncte) Un produs are prețul total de 1190 lei. Care este prețul brut al produsului știind că TVA-ul este de 19% ?

b.) (5 puncte) Un produs are prețul brut (fără TVA) de 486 lei. Care este prețul total , adică cu TVA, știind că TVA-ul este de 19% ?

Indicație: $P_t = P_b \cdot (1 + p\%)$, unde: P_t - prețul total; P_b - prețul brut; $p\%$ - TVA-ul.

2.) O persoană fizică depune la o bancă suma de 500 de lei.

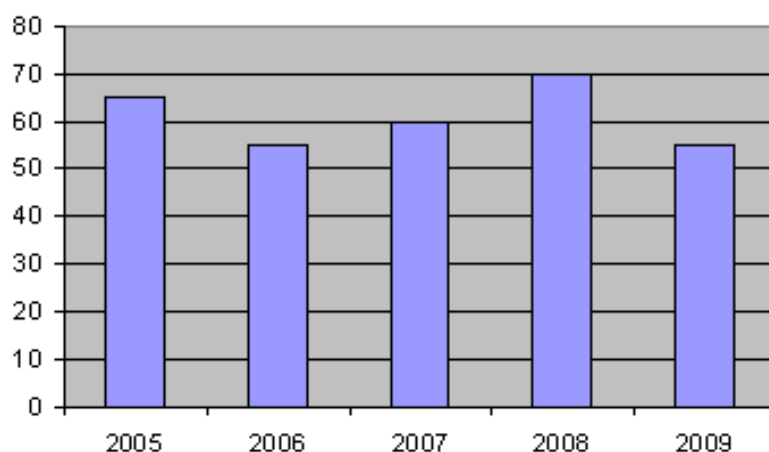
b.) (5 puncte) Calculați care este suma totală obținută cu o dobândă simplă de 10% după doi ani.

Indicație: $t_n = a \cdot (1 + nr)$, unde: a - suma depusă; n - nr. de ani; r - raportul procentual.

c.) (5 puncte) Calculați care este suma totală obținută cu o dobândă compusă de 10% după doi ani.

Indicație: $T_n = a \cdot (1 + r)^n$, unde: a - suma depusă; n - nr. de ani; r - raportul procentual.

3.) a.) (5 puncte) Producțiile de grâu obținute de o societate agricolă în ultimii cinci ani sunt prezentate în histograma următoare:



Folosind reprezentarea grafică completați următoarea tabelă:

Anul					
Cantitatea (mii tone)					

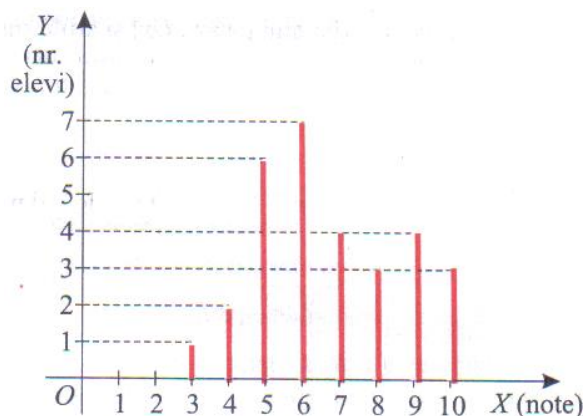
b.) (5 puncte) Repartizarea tuturor elevilor unui liceu tehnic la Examenul de Bacalureat 2010 la Proba E. d.) – Probă scrisă la alegere a profilului și

specializării este prezentată în tabelul alăturat:

Disciplina	Fizică	Chimie	Biologie	Informatică	Economie
Frecvența (nr. elevi)	25	15	10	25	25

Reprezentați grafic cu ajutorul unei histograme (Ox – disciplina; Oy – frecvența) repartitia celor 100 de elevi.

a.) (5 **puncte**) Notele obținute de elevii unei clasei a X- a la teza de matematică sunt reprezentate grafic cu ajutorul diagramei cu bare:



Folosind reprezentarea grafică completați următoarea tabelă:

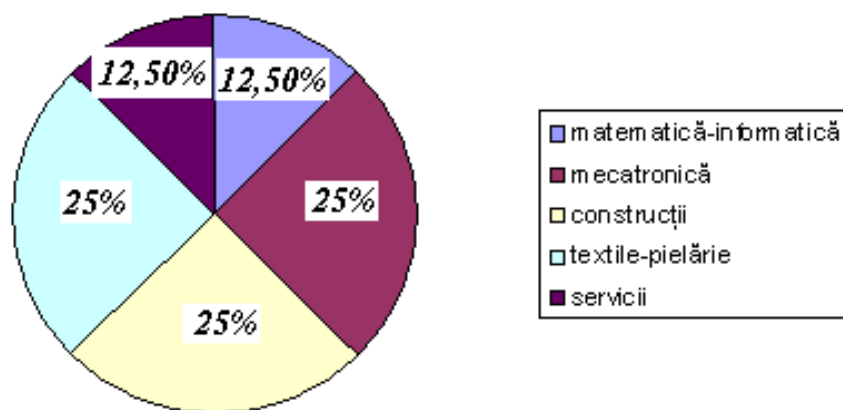
Note								
Frecvența (nr. elevi)								

b.) (5 **puncte**) Situația statistică cu vârstele elevilor unui liceu tehnic este prezentată în tabelul următor:

Vârsta (ani)	15	16	17	18	19	20
Frecvența (nr. de elevi)	150	120	125	50	30	25

Reprezentați grafic cu ajutorul unei diagrame cu bare (Ox – disciplina; Oy – frecvența) repartitia celor 500 de elevi.

2.) a.) (5 **puncte**) Pentru admiterea în clasa a IX – a un liceu tehnic dispune de de 200 de locuri. Repartizarea pe profile este dată în diagarama următoare.



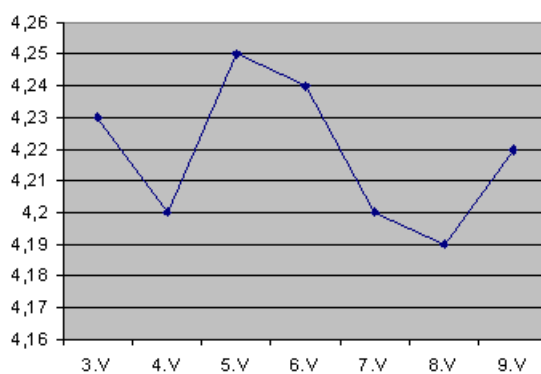
Aflați numărul de locuri repartizat fiecărui profil.

- b.) (5 **puncte**) Situația statistică cu persoanele abonate la cotidienele (ziarele) locale dintr-un oraș este prezentată în tabelul următor:

Cotidianul (ziarul)	„A”	„B”	„C”	„D”	„E”	„F”
Frecvența (nr. de cititori)	15000	12000	12500	5000	3000	2500

Reprezentați grafic cu ajutorul unei diagrame circulare repartitia celor 50000 de cititori.

- 6.) a.) (5 **puncte**) În săptămâna 3.V.2010 – 9.V.2010, evoluția cursului leu-euro este prezentată în următorul grafic.



Folosind reprezentarea grafică completați următoarea tabelă:

Data							
Valoarea (paritatea) în lei a euro							

- b.) (5 puncte) Situația abonaților unui oraș la firmele care asigură conectarea la televiziunea prin cablu este prezentată în tabelul următor:

Firma	„A”	„B”	„C”	„D”
Frecvența (nr. de abonați)	15000	12000	13000	10000

Reprezentați grafic cu ajutorul unei diagrame prin puncte repartitia celor 50000 de abonați.

SUBIECTUL II: Sinteză – 30 puncte

- 1.) La cabinetul medical al unui liceu tehnic se face un studiu statistic privind înălțimea elevilor claselor a X – a. Pentru aceasta se fac observații independente asupra a 200 de elevi, dintre care 100 sunt băieți și 100 sunt fete.

Rezultatele obținute sunt trecute în tabelele următoare:

înălțime băieți (cm): x_i	160	165	170	175	180	185	190
frecvențe	4/100	12/100	25/100	25/100	18/100	12/100	4/100

înălțime fete (cm): y_i	155	160	165	170	175	180	185
frecvențe	4/100	12/100	25/100	25/100	18/100	12/100	4/100

- a.) (10 puncte) Calculați media de selecție a observațiilor făcute asupra băieților.
Calculați media de selecție a observațiilor făcute asupra fetelor.

$$\text{Indicație: } \bar{u} = \frac{1}{n} (n_1 u_1 + n_2 u_2 + \dots + n_r u_r)$$

- b.) (10 puncte) Calculați dispersia de selecție a observațiilor făcute asupra băieților.
Calculați dispersia de selecție a observațiilor făcute asupra fetelor.

$$\text{Indicație: } s^2 = \frac{1}{n} [(u_1 - \bar{u})^2 + (u_2 - \bar{u})^2 + \dots + (u_r - \bar{u})^2]$$

- c.) (10 puncte) Calculați abaterea medie a observațiilor făcute asupra băieților.
Calculați abaterea medie a observațiilor făcute asupra fetelor.

$$\text{Indicație: } s_u = \sqrt{s_u^2}$$

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă **10 puncte** din oficiu.

Capitolul V. Geometrie

Vectori

Breviar teoretic

- O pereche ordonată (A, B) cu A și B puncte din plan se numește vector și se notează prin $\vec{AB}$; unde A este originea vectorului, iar B extremitatea sa.
- Un vector se reprezintă printr-un segment de dreaptă orientat.
- Vectorul este caracterizat de:
 - *direcție
 - *sens
 - *modul
- Doi vectori sunt egali dacă au:
 - *aceeași direcție
 - *același sens
 - *același modul
- Vectorii nenuli care au aceeași direcție se numesc COLINIARI.

Se numește **vector liber** mulțimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu un segment orientat dat. Vectorii liberi se vor nota fie cu litere mici $\vec{a}, \vec{b}, \dots$ fie specificând un reprezentant al acestuia dat de un segment orientat $\vec{AB}, \vec{MN}, \dots$. În desen la un vector liber i se poate schimba originea printr-un punct arbitrar cu condiția de păstrare a direcției, a sensului și a modului.

Baze și coordonate

În reperul cartezian XOY considerăm vectorii:

$\vec{i}$ = vectorul de lungime 1 având sensul axei OX și originea în O

$\vec{j}$ = vectorul de lungime 1 având sensul axei OY și originea în O

Vectorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ se numesc versorii axelor de coordonate.

Fiind date punctele $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ se definește vectorul

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}.$$

Modulul vectorului $\vec{AB}$ este : $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Condiția de paralelism (sau coliniaritate) a doi vectori:

Considerăm vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ și $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Adunarea vectorilor

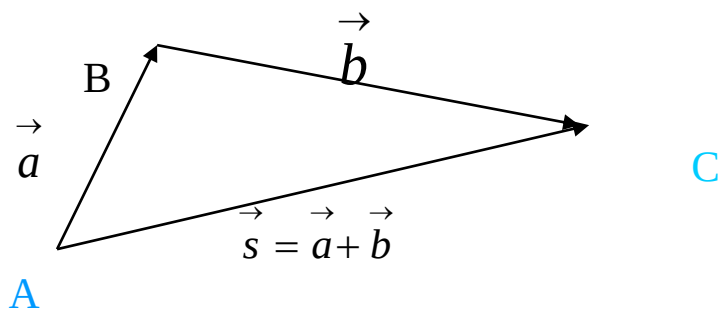
Relația lui Chasles sau regula triunghiului de adunare a 2 vectori :

Oricare ar fi punctele A,B,C are loc relația : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Vectorii $\vec{a} = \vec{AB}$ și $\vec{b} = \vec{BC}$ se numesc **componente**, iar $\vec{s} = \vec{AC}$ **vectorul sumă** sau **vectorul rezultat**. Regula de adunare descrisă anterior se numeste **regula triunghiului**.

Regula de adunare a vectorilor are la origine fapte experimentale în domeniul mecanicii. Ea a fost găsită la compunerea forțelor, apoi la compunerea vitezelor și a altor mărimi vectoriale.

Regula triunghiului

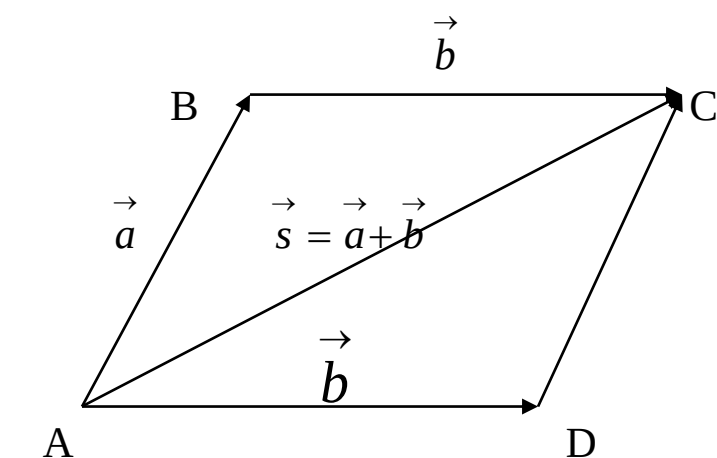


Regula paralelogramului

Fie vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ dați prin reprezentanții lor $\vec{AB}$ și $\vec{BC}$. Considerând punctul D astfel încât $\vec{AD} \sim \vec{BC}$, se observă că patrulaterul ABCD este un paralelogram în care $\vec{AC}$ reprezentant al vectorului sumă $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, este diagonală pentru paralelogram.

Așadar, fiind dați vectorii necoliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$ în plan, pentru determinarea sumei lor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ se poate proceda astfel : se aleg doi reprezentanți $\vec{AB}, \vec{AD}$ ai

acestora cu originea comună. Vectorul suma $\vec{s}$ este vectorul al cărui reprezentant este segmentul orientat $\vec{AC}$, diagonala paralelogramului **ABCD**.



Aplicații:

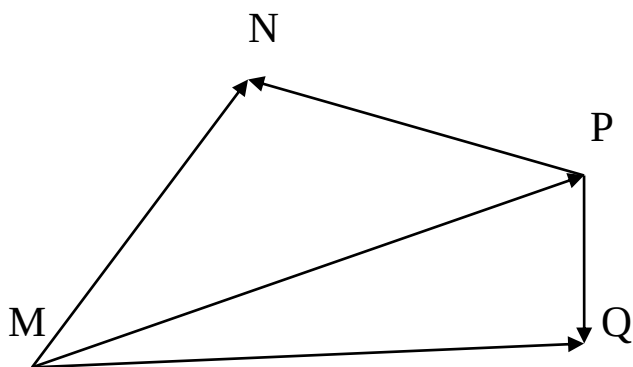
1. Să se demonstreze că în patrulaterul MNPQ are loc relația

$$\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{MQ} + \vec{PN}.$$

Bacalaureat 2009 Varianta 77

Demonstrație:

$$\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{MQ} + \vec{PN} \Leftrightarrow \vec{MN} - \vec{PN} = \vec{MQ} - \vec{PQ}$$



Dar $\vec{MN} - \vec{PN} = \vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}$ (regula triunghiului în $\triangle MNP$)(1)

$\vec{MQ} - \vec{PQ} = \vec{MQ} + \vec{QP} = \vec{MP}$ (regula triunghiului în $\triangle MQP$)(2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \vec{MN} - \vec{PN} = \vec{MQ} - \vec{PQ}$.

2. Să se determine perimetrul triunghiului ABC ale cărui vârfuri sunt A(-1,3), B(-2,0), C(0,3).

Bacalaureat 2009 Varianta 52

Rezolvare:

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC.$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

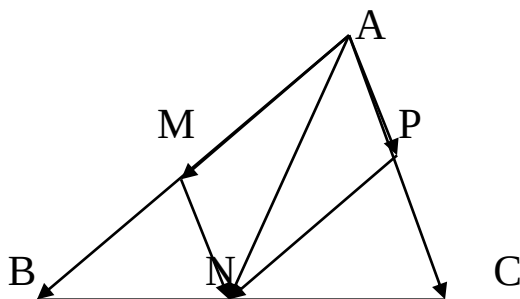
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0+1)^2 + (3-3)^2} = 1$$

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 1 + \sqrt{10} + \sqrt{13}$$

3. În triunghiul ABC punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Să se arate că $\vec{AM} + \vec{AP} = \vec{AN}$.

Rezolvare:



Deoarece M, N, P sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC $\Rightarrow$ MN și NP sunt linii mijlocii în $\triangle ABC \Rightarrow$

$MN \parallel AP$ și $NP \parallel AM \Rightarrow$ AMNP paralelogram $\Rightarrow \vec{AM} + \vec{AP} = \vec{AN}$.

FIȘĂ DE LUCRU

VECTORI ÎN PLAN

- 1.) Într-un reper cartezian xOy , se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(-2,1)$. Determinați coordonatele vectorilor de poziție ai celor două puncte, precum și ai vectorului $\overrightarrow{AB}$.
- 2.) Se consideră un reper cartezian xOy :
- a.) arătați că punctele $A(2,2)$, $B(4,4)$ și $C(3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral;
 - b.) arătați că punctele $A(4,1)$, $B(5,4)$ și $C(1,2)$ sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic;
 - c.) arătați că punctele $A(4,6)$, $B(6,-1)$ și $C(-3,4)$ sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic isoscel;
 - d.) arătați că punctele $A(1,-2)$, $B(4,0)$, $C(3, \frac{3}{2})$ și $D(0, -\frac{1}{2})$ sunt vârfurile unui dreptunghi;
 - e.) arătați că punctele $A(-1,-2)$, $B(1,-1)$, $C(0,1)$ și $D(-2,0)$ sunt vârfurile unui pătrat.
- 3.) Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(7,5)$, $B(1,3)$ și $C(5,1)$. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Arătați că $d(B, AM) = d(C, AM)$.
- 4.) Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(0,3)$ și dreapta $d: x - y = 0$. Aflați coordonatele punctului $M \in d$ cu proprietatea că $A_{\Delta MAB} = 3$.
- 5.) Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(-2,5)$ și dreapta $d: 4x + 3y - 17 = 0$. Arătați că $A_{\Delta MAB} = 5; (\forall) M \in d$.
- 6.) Într-un reper cartezian xOy se consideră ΔABC . Știind că ecuațiile dreptelor suport ale laturilor AB , BC , CA sunt, respectiv $d_1: 3x + 4y - 13 = 0$, $d_2: 5x - y + 9 = 0$, $d_3: 2x - 5y - 1 = 0$, aflați $A_{\Delta ABC}$.
- 7.) Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(-3,4)$, $C(-1,-2)$ și $D(3,-2)$. Aflați aria patrulaterului $ABCD$.

8.) Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(3,5)$, $C(2,1)$, $D(4,6)$ și dreapta $d : x - y = 0$. Determinați punctul $M \in d$, știind că $A_{\Delta MAB} = A_{\Delta MCD}$.

9.) Scrieți un vector director al dreptei d , unde d are ecuația:

a.) $5x + 4y - 3 = 0$; b.) $y = 7x - 3$; c.) $3x - 2 = 0$; d.) $5y - 3 = 0$.

10.) Dacă $\vec{u}(x,y)$ este un vector director al unei drepte d , aflați măsura unghiului dintre d și axa Ox , unde:

a.) $\vec{u}(-1, \sqrt{3})$; b.) $\vec{u}(-\sqrt{3}, 1)$; c.) $\vec{u}(0, 4)$; d.) $\vec{u}(4, 0)$.

11.) Scrieți ecuațiile parametrice ale dreptei d , definită astfel:

a.) d trece prin $A(1,2)$ și are $\vec{u}(3,-1)$ ca vector director;

b.) d trece prin originea O și are $\vec{u}(3,4)$ ca vector director;

c.) d trece prin $A(1,7)$ și este paralelă cu axa Oy ;

d.) d trece prin $A(2,-4)$ și este paralelă cu axa Ox .

12.) Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele:

a.) $M_1(-1,-2); M_2(5,7)$; b.) $M_1(2,0); M_2(0,2)$;

13.) Să se verifice dacă punctele $M_1(-1,-2); M_2(5,7); M_3(1,1)$ sunt coliniare.

14.) Se consideră triunghiul de vârfuri: $A(3,6); B(-1,3); C(2,-1)$.

Să se stabilească:

a.) ecuațiile dreptelor: $AB; BC; CA$;

b.) ecuațiile medianelor din vârfurile triunghiului;

15.) Să se determine parametrii λ și μ astfel ca ecuațiile $4x - (1 + \lambda)y + 2 = 0$ și $(\mu + 3)x - 6y + 4 = 0$ să reprezinte aceeași dreaptă.

16.) Se consideră triunghiul de vârfuri: $A(3,6); B(-1,3); C(2,-1)$. Să se stabilească ecuațiile dreptelor: $AB; BC; CA$, precum și ecuațiile dreptelor paralele prin vârfurile triunghiului la latura opusă fiecăruia.

17.) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele d_1 și d_2 de ecuații carteziane:

a.) $d_1 : x - 2y - 3 = 0$; $d_2 : mx + 5y - 2 = 0$.

b.) $d_1 : y = 3x + 11$; $d_2 : y = (m - 2)x + 12$.

să fie paralele.

18.) Se consideră dreptele: $d_1 : (\lambda - 2)x - (\lambda - 1)y - 6 = 0$; $d_2 : 2x - 3y + \mu = 0$ unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Să se stabilească poziția relativă a celor două drepte. Discuție.

19.) Să se determine parametrii λ și μ astfel ca ecuațiile $3x + \lambda y - 8 = 0$ și $\mu x + 4y + 20 = 0$ să reprezinte drepte paralele. Discuție.

9.) Scrieți ecuația perpendicularei duse din punctul $A(-2, 1)$ pe dreapta d , dacă d are ecuația:

a.) $y = 3x - 2$; b.) $y + x = -1$; c.) $2y - 3x = 5$; d.) $x + 2y = 0$.

20.) Arătați că dreapta care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ și este perpendiculară pe dreapta $ax + by + c = 0$ are ecuația $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$.

21.) Dacă o latură a unui triunghi se află pe dreapta $2x - 3y + 6 = 0$, iar $2x + y - 2 = 0$, $x + 3y - 12 = 0$ sunt ecuațiile a două dintre înălțimile triunghiului, să se scrie ecuațiile celorlalte laturi.

TEST DE EVALUARE
VECTORI ÎN PLAN

SUBIECTUL I: Exersare – 70 puncte

- 1.) Fie reperul cartezian xOy și punctele $A(3;1)$; $B(-1;3)$ și $C(-3;0)$.
a.) (10 puncte) Reprezentați în reperul cartezian xOy , $\triangle ABC$ ale cărui vârfuri sunt cele trei puncte.
b.) (10 puncte) Calculați lungimile laturilor $\triangle ABC$ (AB ; BC ; AC).

Indicație: $MN = d(M; N) = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$.

- (10 puncte) Fie punctele $A(-1;2)$ și $B(3;-2)$. Să se determine numerele reale a și b astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

- 3.) (10 puncte) Se consideră vectorii $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$.

- 4.) (10 puncte) Scrieți vectorul de poziție $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j}$, unde punctul M reprezintă mijlocul $[AB]$, iar $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\overrightarrow{OB} = 8\vec{i} - 3\vec{j}$.

Indicație: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

- 5.) (10 puncte) Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctele $A(1;2)$ și $B(3;5)$.

Indicație: $AB: y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$, dacă $x_A \neq x_B$.

- 6.) (10 puncte) Calculați aria $\triangle ABC$, unde $A(-1;3)$; $B(4;-1)$ și $C(3;3)$.

Indicație: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |(x_A y_B - y_A x_B) + (x_B y_C - y_B x_C) + (x_C y_A - y_C x_A)|$.

SUBIECTUL II: Sinteză – 20 puncte

- 1.) „Mediatoarea unui segment reprezintă dreapta perpendiculară pe segment și care intersectează segmentul în mijlocul său”.

Fie reperul cartezian xOy și punctele $A(-1;3)$, $B(3;-1)$.

- a.) (5 puncte) Reprezentați în reperul cartezian xOy , dreapta ce trece prin punctele date și determinați poziția în plan a punctului ce constituie mijlocul $[AB]$.
b.) (5 puncte) Scrieți ecuația mediatoarei $[AB]$.
2.) a.) (5 puncte) Arătați că dreptele $d: x + 5y - 35 = 0$, $d': 3x + 2y - 27 = 0$ sunt concurente și calculați coordonatele punctului de concurență.
b.) (5 puncte) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $d: ax + 5y - 4 = 0$ și $d': 6x + by - 7 = 0$ sunt paralele.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 50 minute.
Se acordă **10 puncte** din oficiu.

ECUAȚIA DREPTEI ÎN PLAN

Breviar teoretic

Distanța dintre două puncte în plan

- Distanța dintre punctele $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ este $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- Fie M mijlocul segmentului $[AB]$, unde $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$. Atunci
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Ecuația unei drepte în plan

- Ecuația dreptei ce trece prin două puncte $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ cu $x_2 \neq x_1$ și $y_2 \neq y_1$ este

$$AB: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

- Panta dreptei AB determinată de punctele $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ este $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$.

- Fie dreptele d_1 și d_2 de pante m_1 , respectiv m_2 .

1) d_1 și d_2 sunt paralele dacă și numai dacă $m_1 = m_2$.

2) d_1 și d_2 sunt perpendiculare dacă și numai dacă $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- Ecuația dreptei determinată de punctul $M(x_0; y_0)$ și de panta m este $y - y_0 = m(x - x_0)$.

- Fie triunghiului ABC , unde $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ și $C(x_3; y_3)$ și G centru de greutate.

$$\text{Atunci } G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

- Dacă punctul A' este simetricul punctului A față de B , atunci B este mijlocul segmentului $[AA']$.

Aplicații

- Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctele $A(2; -1)$ și $B(1; -2)$.
- Să se determine numărul real a știind că dreptele $2x - y + 3 = 0$ și $ax + 2y + 5 = 0$ sunt paralele.
- Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(1; 1)$ și este paralelă cu dreapta $4x + 2y + 5 = 0$.
- Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(2; -3)$ și este paralelă cu dreapta $x + 2y + 5 = 0$.

-
5. Să se determine ecuația dreptei care conține punctele $A(2;3)$ și $B(-3;-2)$.
 6. Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC știind că $A(-1;1)$ și $B(3;-2)$.
 7. Să se calculeze lungimea segmentului AB , determinat de punctele $A(2;3)$ și $B(5;-1)$, în reperul cartezian xOy .
 8. Să se determine coordonatele punctului C știind că el este simetricul punctului $A(5;4)$ față de punctul $B(-2;1)$.
 9. Să se determine distanța dintre punctele $A(3;-1)$ și $B(-1;2)$.
 10. Să se determine perimetrul triunghiului ABC ale cărui vârfuri sunt punctele $A(-1;3)$, $B(-2;0)$ și $C(0;3)$ în reperul cartezian xOy .
 11. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;2)$, $B(5;6)$ și $C(-1;1)$. Să se determine ecuația medianei duse din vârful C în triunghiul ABC .
 12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2;3)$, $B(1;5)$ și $C(4;2)$. Să se calculeze distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC .
 13. În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $d_1: -2x - my + 3 = 0$ și $d_2: mx + y - 5 = 0$. Să se determine numerele reale m pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.
 14. Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctele $A(2;-3)$ și $B(-3;2)$.
 15. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2;-1)$, $B(-2;2)$. Să se determine distanța dintre punctele A și B .
 16. Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(2;-4)$ față de punctul $B(1;-2)$.
 17. Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(1;1)$ și are panta egală cu 1.
 18. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2;4)$, $B(1;1)$ și $C(3;-1)$. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC .
 19. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$ și $N(2,1)$. Să se determine ecuația dreptei MN .
 20. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB , știind că $A(5;-4)$ și $B(-3;6)$.
 21. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;2)$, $B(5;2)$ și $C(3;-1)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .

- 22.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5;-1)$ și $B(3;1)$. Să se determine coordonatele simetricului A față de punctul B .
- 23.Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât distanța dintre punctele $A(2;-1)$ și $B(-1;a)$ să fie egală cu 5.
- 24.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1;-2)$, $B(1;2)$ și $C(2;-1)$. Să se calculeze distanța de la punctul C la mijlocul segmentului AB .
- 25.Să se determine coordonatele punctului de intersecție al dreptelor de ecuații $2x + y - 4 = 0$ și $x + y - 3 = 0$.
- 26.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2;2)$ și $B(4;4)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB .
- 27.Să se determine punctul de intersecție al dreptelor de ecuații $4x - 6y - 2 = 0$ și $2x + 3y - 7 = 0$.
- 28.Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(4;0)$ și $B(0;2)$.
- 29.Să se determine lungimea medianei din A a triunghiului ABC , știind că vârfurile acestuia sunt $A(0;4)$, $B(-2;0)$ și $C(8;0)$.
- 30.Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1;-2)$ și are panta egală cu 2.
- 31.Să se determine coordonatele punctului M care aparține dreptei AB și care este egal depărtat de punctele $A(1;-1)$ și $B(5;-3)$.
- 32.Să se determine valorile reale ale numărului a știind că distanța dintre punctele $A(2;1)$ și $B(7;a)$ este egală cu 13.
- 33.Să se determine coordonatele punctului de intersecție al dreptelor de ecuații $x + 3y - 1 = 0$ și $3x + 2y + 4 = 0$.
- 34.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5;-4)$ și $B(0;8)$. Să se calculeze lungimea segmentului AM , unde M este mijlocul segmentului AB .
- 35.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1;1)$, $B(-1;0)$ și $C(3;-4)$. Să se calculeze lungimea segmentului AM , unde M este mijlocul segmentului BC .
- 36.Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(2;1)$ și $B(1;-2)$.

-
- 37.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2;0)$ și $B(m^2-1;0)$, cu $m \in R$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctul $C(5;0)$ să fie mijlocul segmentului AB .
- 38.În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(2;m)$, unde m este un număr real. Să se determine numerele reale m pentru care $OM = \sqrt{5}$.
- 39.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1;-1)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$ și $D(2;3)$. Să se arate că dreptele AB și CD sunt paralele.
- 40.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2;1)$, $B(4;-3)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB .