Breviar Teoretic: **Structuri algebrice. Legi de compoziţie**

Fie G o mulţime nevidă şi o lege "$*$".

"$*$" este o lege de compoziţie pe G dacă pentru orice $x, y \in G$, $x * y \in G$.(mulţimea ***G*** este **parte stabilă în raport cu "$*$")**.

Exemplu: Să se arate că $G = [2, \infty)$ este parte stabilă în raport cu legea "$*$", $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.

$\forall x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$

Rezolvare:

$$x * y = x(y-2) - 2(y-2) + 2 \Rightarrow x * y = (x-2)(y-2) + 2$$
$$x \in G \Rightarrow x \in [2, \infty) \Rightarrow x - 2 \in [0, \infty)$$
$$y \in G \Rightarrow y \in [2, \infty) \Rightarrow \underline{y - 2 \in [0, \infty)}$$
$$(x-2)(y-2) \in [0, \infty) \Rightarrow (x-2)(y-2) + 2 \in [2, \infty) \Rightarrow x * y \in \Re$$

Proprietăţi:

Considerăm o mulţime nevidă G pe care definim operaţia (legea) "$*$".

1. Comutativitate: $x * y = y * x, \forall x, y \in G$

2. Asociativitate: $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$

3. Element neutru: $\exists e \in G\ a.i.\ x * e = e * x = x, \forall x \in G$

4. Element simetrizabil: $\forall x \in G, \exists x' \in G. a.i. x * x' = x' * x = e$.

Structuri:

I. $(M,*)$ **monoid** dacă:

M1) Legea "$*$" este asociativă

M2) Legea "$*$" are element neutru.

Dacă în plus M3) Legea "$*$" este comutativă atunci $(M,*)$ monoid comutativ.

II. $(G,*)$ **grup** dacă:

G1) Legea "$*$" este asociativă.

G2) Legea "$*$" are element neutru.

G3) Orice element din G este simetrizabil în raport cu "$*$".

Dacă în plus G4) Legea "$*$" este comutativă atunci $(G,*)$ grup comutativ

III. Subgrup: Fie $(G,*)$ un grup. O submulțime nevidă H a lui G se numește subgrup al grupului G dacă legea de compoziție din G induce pe H o lege de compoziție împreună cu care H este grup.

IV. Inel : Tripletul $(A,+,\cdot)$, $A \neq \varnothing$ pentru care:

A1) $(A,+)$ grup abelian(comutativ)

A2) $(A,\cdot)$ monoid

A3) Înmulțirea este distributivă față de adunare

Dacă în plus A4) Înmulțirea este comutativă atunci inelul este comutativ.

V. Corp : Tripletul $(K,+,\cdot)$, K este o mulțime cu cel puțin două elemente:

K1) $(K,+)$ grup abelian(comutativ) cu elementul neutru 0.

K2) $(K/\{0\},\cdot)$ grup cu elementul neutru 1.

K3) Înmulțirea este distributivă față de adunare.

Dacă în plus K4) Înmulțirea este comutativă atunci $(K,+,\cdot)$ corp comutativ.

Exemple :

Pe $\Re$ definim legea de compoziție $x*y=xy-2x-2y+6$.

a. Calculați $1*2$.

Rezolvare: $1*2=1\cdot 2-2\cdot 1-2\cdot 2+6=2-2-4+6=2$.

b. Arătați că $x*y=(x-2)(y-2)+2,\forall x,y\in\Re$

Rezolvare: $x*y=x(y-2)-2(y-2)+2\Rightarrow x*y=(x-2)(y-2)+2,\forall x,y\in\Re$

c. Arătați că legea "$*$" este comutativă pe $\Re$.

Rezolvare: $\left.\begin{array}{l} x*y=(x-2)(y-2)+2 \\ y*x=(y-2)(x-2)+2 \end{array}\right\}\Rightarrow x*y=y*x,\forall x,y\in\Re$

d. Arătați că legea "$*$" este asociativă pe $\Re$.

Rezolvare: $(x*y)*z=x*(y*z),\forall x,y,z\in\Re$

$$\left.\begin{array}{l} (x*y)*z=[(x-2)(y-2)+2]*z=\{[(x-2)(y-2)+2]-2\}(z-2)+2=(x-2)(y-2)(z-2)+2 \\ x*(y*z)=x*[(y-2)(z-2)+2]=(x-2)\{[(y-2)(z-2)+2]-2\}+2=(x-2)(y-2)(z-2)+2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$(x*y)*z=x*(y*z)\ \forall x,y,z\in\Re$

e. Arătați că legea "$*$" admite element neutru.

Rezolvare: $\exists e\in\Re\, a.i.\, x*e=e*x=x,\forall x\in\Re$

$$\left.\begin{array}{l} x*e=(x-2)(e-2)+2 \\ e*x=(e-2)(x-2)+2 \end{array}\right\}\Rightarrow x*e=e*x,\Rightarrow (x-2)(e-2)+2=x\Rightarrow (x-2)(e-2)=x-2$$

$daca\, x-2\neq 0\Rightarrow e-2=1\Rightarrow e=3$

f. Arătați că orice element din $\Re$ este simetrizabil în raport cu legea "$*$".

Rezolvare: $\forall x\in\Re,\exists x^{'}\in\Re.a.i.\, x*x^{'}=x^{'}*x=e$

$$\left.\begin{array}{l} x*x^{'}=(x-2)(x^{'}-2)+2 \\ x^{'}*x=(x^{'}-2)(x-2)+2 \end{array}\right\}\Rightarrow x*x^{'}=x^{'}*x,\Rightarrow (x-2)(x^{'}-2)+2=3\Rightarrow (x-2)(x^{'}-2)=1$$

$$daca\, x-2\neq 0\Rightarrow x^{'}-2=\frac{1}{x-2}\Rightarrow x^{'}=\frac{1}{x-2}+2\Rightarrow x^{'}=\frac{2x-3}{x-2}$$

g. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

1. $x*x=x$

2. $x*x=11$

3. $x*x*x=x$

4. $x*x*x=66$

Rezolvare: 1. $x*x=x\Rightarrow(x-2)(x-2)+2=x\Rightarrow(x-2)^2=x-2$

C I. $x-2=0\Rightarrow x=2$

C II. $x-2\neq 0\Rightarrow x-2=1\Rightarrow x=3$

2. $x*x=11\Rightarrow(x-2)(x-2)+2=11\Rightarrow(x-2)^2=9\Rightarrow\begin{cases}x-2=-3\Rightarrow x=-1\\ x-2=3\Rightarrow x=5\end{cases}$

3. $x*x*x=x\Rightarrow[(x-2)(x-2)+2]*x=x\Rightarrow\{[(x-2)(x-2)+2]-2\}(x-2)+2=x\Rightarrow$

$\Rightarrow(x-2)^3+2=x\Rightarrow(x-2)^3=x-2$

C I. $x-2=0\Rightarrow x=2$

C II. $x-2\neq 0\Rightarrow(x-2)^2=1\Rightarrow\begin{cases}x-2=-1\Rightarrow x=1\\ x-2=1\Rightarrow x=3\end{cases}$

4. $x*x*x=66\Rightarrow(x-2)^3+2=66\Rightarrow(x-2)^3=64\Rightarrow(x-2)^3=4^3\Rightarrow x-2=4\Rightarrow x=6$

h. Știind că legea “$*$” este asociativă să se calculeze $E=(-1005)*(-1004)*....*1004*1005$

$x*2=(x-2)(2-2)+2=0+2=2,\forall x\in\Re$ (1)
$2*x=(2-2)(x-2)+2=0+2=2,\forall x\in\Re$ (2)
$not.(-1005)*(-1004)*...*1=a$
$3*4*...*1004*1005=b$
$\Rightarrow E=a*2*b\overset{(1),(2)}{=}2$

1. Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x\circ y=xy+4x+4y+12$, pentru orice $x,y\in\Re$
a) Să se verifice că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice $x,y\in\Re$.

b) Să se calculeze $x\circ(-4)$.
c) Ştiind că operaţia „$\circ$” este asociativă, să se calculeze $(-20015)\circ(-2014)\circ...\circ 2014\circ 2015$

2. Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia pentru $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$ pentru orice $x, y \in \Re$.
a) Să se verifice că $x \circ y = 2(x-3)(y-3)+3$ pentru orice $x, y \in \Re$.
b) Să se rezolve, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $x \circ x = 11$.
c) Ştiind că operaţia „$\circ$" este asociativă, să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ ... \circ \sqrt{2015}$.
3. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$ pentru orice $x, y \in \Re$.
a) Să se verifice că $x \circ y = (x-2)(y-2)+2$ pentru orice $x, y \in \Re$.
b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$, $\forall x, y \in \Re$.
c) Ştiind că legea „$\circ$" este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei
$E = (-2015) \circ (-2014) \circ .... \circ 2014 \circ 2015$

4. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = xy + 7(x+y) + 42$, pentru orice $x, y \in \Re$.
a) Să se calculeze $\sqrt{2} \circ (-\sqrt{2})$.
b) Să se verifice că $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$ pentru orice $x, y \in \Re$.
c) Ştiind că legea „$\circ$" este asociativă, să se rezolve în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $x \circ x \circ x = x$.

5. Se consideră mulţimea $M = [k;+\infty) \subset R$, $k \in R$ şi operaţia $x * y = xy - k(x+y) + k^2 + k$, $x, y \in \Re$
a) Să se determine $k \in \Re$ astfel încât 2*3=2.
b) Pentru k=2, să se rezolve în M ecuaţia x*x=6.
c) Să se demonstreze că pentru $\forall x, y \in M$ rezultă că $x * y \in M$.
6. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = (x-3)(y-3)+3$.
a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x \circ x = x * x$.
b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.
c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x*(y+1) = 4 \\ (x-y) \circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in Z$.

7. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = xy - 5(x+y) + 30$.
a) Să se demonstreze că $x * y = (x-5)(y-5)+5$, $x, y \in \Re$.
b) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$".
c) Ştiind că legea de compoziţie „$*$" este asociativă să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x * x = x$.
8. Se consideră legea de compoziţie pe $\Re$ definită prin $x \circ y = xy - x - y + 2$.
a) Să se arate că legea „$\circ$" este asociativă.
b) Să se arate că dacă $x, y \in (1;+\infty)$, atunci $x \circ y \in (1;+\infty)$.

9. Să se determine $a \in Z$ cu proprietatea $x \circ a = a$, oricare ar fi $x \in Z$.Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = (x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}$.

a) Să se rezolve ecuaţia $x * x = x, \forall x \in \Re$.

b) Să se demonstreze că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

c) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

10. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = 2xy - x - y + 1$.

a) Să se arate că $x * y = xy + (1-x)(1-y)$, $\forall x, y \in \Re$.

b) Să se arate că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

c) Să se rezolve în $\Re$ ecuaţia $x * (1-x) = 0$.

11. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = 2xy - 4x - 6y + 21$, pentru $\forall x, y \in \Re$.

a) Să se arate că $x * y = 2(x-3)(y-3)+3,\ x, y \in \Re$.

b) Să se rezolve în $\Re$ ecuaţia $5^x * 5^x = 11$.

c) Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea „$*$”.

Breviar teoretic. <u>Clase de resturi modulo n</u>

Fie $a \in \mathrm{Z}$ şi $n \in \mathrm{N}^*$.

Notăm cu $\hat{0} = \{a \in \mathrm{Z} \mid a \bmod n = 0\}$ mulţimea numerelor întregi care împărţite la n dau restul 0;

Mulţimea $Z_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, ..., n-1\}$ se numeşte mulţimea claselor de resturi modulo n.

ex. $Z_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}$; $Z_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$; $Z_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$; $Z_9 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, ..., \hat{8}\}$ ş.a.m.d.

Pe Z_n definim două legi de compoziţie:

$\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a \oplus b} = \widehat{(a+b) \bmod n}$ =⟶ adunarea claselor de resturi modulo n

$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \otimes b} = \widehat{(a \cdot b) \bmod n}$ ⟶ înmulţirea claselor de resturi modulo n.

Proprietăţile **adunării** claselor de resturi modulo n.

Iată un exemplu. $Z_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$. Pentru că mulţimea este finită îi voi face tabla operaţiei

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{4}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$

- Se observă că dacă compunem două elemente din Z_6 rezultatul este tot un element din Z_6 ceea ce înseamnă că Z_6 este parte stabilă a lui Z_n în raport cu adunarea modulo n;

- $(\hat{1}+\hat{2})+\hat{5}=\hat{3}+\hat{5}=\hat{8}=\hat{2}$ iar $\hat{1}+(\hat{2}+\hat{5})=\hat{1}+\hat{7}=\hat{8}=\hat{2}$ ceea ce ne poate conduce la a arăta că legea este asociativă de altfel

- $\boxed{(\hat{a}+\hat{b})+\hat{c}=\widehat{(a+b)}+\hat{c}=\widehat{(a+b)+c}=\widehat{a+(b+c)}=\hat{a}+\widehat{(b+c)}=\hat{a}+(\hat{b}+\hat{c}),\ \forall}$ $\boxed{\hat{a},\hat{b},\hat{c}\in Z_n}$

- Tabla legii este simetrică faţă de diagonala principală deci legea este comutativă, după cum se poate uşor observa că $\boxed{\hat{a}+\hat{b}=\widehat{a+b}=\widehat{b+a}=\hat{b}+\hat{a},\ \forall\hat{a},\hat{b}\in Z_n}$

- $\hat{0}$ este elementul neutru al legii deoarece lasă toate elementele din Z_n neschimbate;

  $\boxed{\hat{a}+\hat{0}=\hat{0}+\hat{a}=\hat{a},\forall\hat{a}\in Z_n}$

- Dacă notăm cu $-\hat{a}$ simetricul (opusul la adunare) lui a atunci: $-\hat{0}=\hat{0}$; $-\hat{1}=\hat{5}$; $-\hat{2}=\hat{4}$; $-\hat{3}=\hat{3}$; $-\hat{4}=\hat{2}$;$-\hat{5}=\hat{1}$ (fiecare element compus cu simetricul său trebuie să dea elementul neutru), deci toate au simetric. $\boxed{\hat{a}+(-\hat{a})=(-\hat{a})+\hat{a}=\hat{0},\forall\hat{a}\in Z_n}$

REŢINE: $\boxed{-\hat{a}=\widehat{n-a}}$ Într-adevăr $\hat{a}+\widehat{n-a}=\widehat{a+n-a}=\hat{n}=\hat{0}$ şi atunci $-\hat{4}=\widehat{6-4}=\hat{2}$ sau $-\hat{1}=\widehat{6-1}=\hat{5}$.

- pentru a găsi simetricul unui element urmărim pe linia sau pe coloana numărului dorit acolo unde apare 0.

Exemplu: simetricul lui $\hat{2}$ este $\hat{4}$ deoarece pe linia (coloana) lui $\hat{2}$, $\hat{0}$ apare în dreptul lui $\hat{4}$, sau simetricul lui $\hat{3}$ este $\hat{3}$ deoarece pe linia (coloana) lui $\hat{3}$, $\hat{0}$ este apare în dreptul lui $\hat{3}$ etc.

Proprietăţile înmulţirii claselor de resturi modulo n.

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{4}$	$\hat{5}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{4}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$
$\hat{4}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{4}$	$\hat{2}$
$\hat{5}$	$\hat{0}$	$\hat{5}$	$\hat{4}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

- Se observă că dacă compunem două elemente din Z_6 rezultatul este tot un element din Z_6, ceea ce înseamnă că Z_6 este parte stabilă a lui Z_n în raport cu înmulţirea modulo n;

- $(\hat{3}\cdot\hat{4})\cdot\hat{5}=\widehat{12}\cdot\hat{5}=0\cdot\hat{5}=\hat{0}$ iar $\hat{3}\cdot(\hat{4}\cdot\hat{5})=\hat{3}\cdot\widehat{20}=\hat{3}\cdot\hat{2}=\hat{6}=\hat{0}$ ceea ce ne poate conduce la a arăta că legea este asociativă de altfel $\boxed{(\hat{a}\cdot\hat{b})\cdot\hat{c}=(a\cdot b)\cdot\hat{c}=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=\hat{a}\cdot(b\cdot c)=\hat{a}\cdot(\hat{b}\cdot\hat{c}),\ \forall\,\hat{a},\hat{b},\hat{c}\in Z_n}$

- Tabla legii este simetrică faţă de diagonala principală deci legea este comutativă, după cum se poate uşor observa că $\boxed{\hat{a}\cdot\hat{b}=\widehat{a\cdot b}=\widehat{b\cdot a}=\hat{b}\cdot\hat{a},\ \forall\hat{a},\hat{b}\in Z_n}$

- $\hat{1}$ este elementul neutru al legii deoarece lasă toate elementele din Z_n neschimbate;

$\boxed{\hat{a}\cdot\hat{1}=\hat{1}\cdot\hat{a}=\hat{a},\forall\hat{a}\in Z_n}$

- Dacă notăm cu $\hat{a}^{-1}$ simetricul (inversul la înmulţire) lui a atunci: $\hat{0}^{-1}$= nu există; $1^{-1}=\hat{1}$; $\hat{2}^{-1}$= nu există ; $\hat{3}^{-1}$= nu există; $\hat{4}^{-1}$= nu există ; $\hat{5}^{-1}=\hat{5}$ (fiecare element compus cu simetricul său trebuie să dea elementul neutru), deci nu toate elementele au simetric.
- pentru a găsi simetricul unui element urmărim pe linia sau pe coloana numărului dorit, acolo unde apare $\hat{1}$

Exemplu: simetricul lui $\hat{5}$ este $\hat{5}$deoarece pe linia (coloana) lui $\hat{5}$, $\hat{1}$ apare în dreptul elementului $\hat{5}$, sau simetricul lui $\hat{1}$ este $\hat{1}$ deoarece pe linia (coloana) lui $\hat{1}$, $\hat{1}$ apare în dreptul elementului $\hat{1}$.

Celelalte elemente nu conţin pe linii sau pe coloane pe $\hat{1}$ (elementul neutru), deci nu au simetric.

Deci (Z_n,+,·) formează un inel comutativ.

Proprietate . Un element $\hat{a}\in Z_n$ este inversabil în $Z_n \Leftrightarrow$ **a este număr prim cu n** adică c.m.m.d.c (a,n)=1.

Notăm cu $U(Z_n)$= mulţimea elementelor inversabile din Z_n.

$\boxed{\text{Atunci } U(Z_p)=Z_p^*\text{, p nr prim.}}$

Exemple $U(Z_5)=\{\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}\}$; $U(Z_8)=\{\hat{1},\hat{3},\hat{5},\hat{7}\}$

Exemplu de aplicaţie: Să se rezolve în Z_4 ecuaţia $\hat{3}x+\hat{2}=\hat{0}$

$Z_4=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$

$\hat{3}x+\hat{2}=\hat{0}\Rightarrow\hat{3}x=-\hat{2}\Rightarrow\hat{3}x=\hat{2}$

Realizăm tabela de înmulțire a lui $\hat{2}$ în Z_4

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

$\Rightarrow x = \hat{2}$

Aplicații:

1. Să se calculeze în Z_6 determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \end{vmatrix}$.

2. Să se rezolve în Z_3, Z_4 sistemele :

a) $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ x + \hat{2}y = \hat{0} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \hat{2}x + y = \hat{2} \\ x + \hat{2}y = \hat{1} \end{cases}$

ANALIZĂ

Breviar Teoretic: Noțiunea de primitivă. Integrala unei funcții

1. Fie $I \subseteq \Re$ un interval, $f : I \to \Re$. Se numeşte *primitivă a funcţiei* f *pe I*, orice funcţie $F : I \to \Re$ derivabilă pe I şi cu proprietatea $F^{'}(x) = f(x), \forall x \in I$.

2. Operaţia de determinare a unei primitive F a lui f pe intervalul I se numeşte *operaţie de integrare*, notată prin simbolul $\int f(x)dx$.

Există **două condiţii** pentru care o funcţie să admită primitive:

Condiţia 1: Dacă funcţia este continuă pe un anumit interval, atunci ea admite primitive pe intervalul respectiv.

Conditia 2: Fie o funcţie $f : I \to \Re$. Dacă există o altă funcţie F, definită pe acelaşi interval, astfel încât $F^{'}(x) = f(x), \forall x \in I$, atunci acea funcţie admite primitive pe intervalul respectiv.

Exemple:

1. Se consideră funcţia $f : \Re \to \Re$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, x < 1 \\ (x+1)\ln x, x \geq 1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe $\Re$.

Rezolvare:

Dacă f continuă pe $\Re$, atunci f admite primitive pe $\Re$

f continuă pe $\Re/\{1\}$ fiind compunere de funcții elementare și anume funcția polinomială și funcția logaritmică. (1)

Studiem continuitatea în punctul $x_0 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} ls(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^2 + x - 2) = 1 + 1 - 2 = 0 \\ ld(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} ((x+1)\ln x) = 1\ln 1 = 0 \\ f(1) = (0+1)\ln 1 = 1\ln 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ls(1) = ld(1) = f(1) \Rightarrow f \; continua \, in \; x_0 = 1 \quad (2)$$

$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$ f continuă pe $\Re \Rightarrow f$ admite primitive pe $\Re$.

2. Se consideră funcţia $f:\Re\to\Re$, $f(x)=e^x+x^2+2x$. Să se arate că funcţia $F:\Re\to\Re$, $F(X)=e^x+\frac{x^3}{3}+x^2+1$ este o primitivă a funcţiei *f*.

Rezolvare: F primitiva funcției *f* $\Leftrightarrow F'(x)=f(x), \forall x\in\Re$

$$F'(x)=(e^x+\frac{x^3}{3}+x^2+1)'=(e^x)'+(\frac{x^3}{3})'+(x^2)'+1'=e^x+\frac{3x^2}{3}+2x+0=e^x+x^2+2x=f(x), \forall x\in\Re$$

<u>Aplicații:</u>

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\Re$, $f(x)=1-\frac{1}{x^2}$. Să se arate că funcţia $F:(0,\infty)\to\Re$, $F(x)=x+\frac{1}{x}$ este o primitivă a funcţiei *f*.

2. Se consideră funcţia $f:\Re\to\Re$, $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, x\le 1\\ \ln x, \quad x>1\end{cases}$
   a) Să se arate că funcţia *f* admite primitive.
   b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei f este convexă pe $(1,\infty)$.

3. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\Re$, $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$. Să se arate că funcţia $F:(1,\infty)\to\Re$ $F(x)=(x+1)\ln x-x+1$ este o primitivă a funcţiei *f*.

4. Se consideră funcţia $f:[2,\infty)\to\Re$, $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$. Să se demonstreze că orice primitivă a funcţiei *f* este concavă pe $[2,\infty)$.

5. Se consideră funcţiile $f,g:\Re\to\Re$, $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$ şi $g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$. Să se arate că funcţia *g* este o primitivă a funcţiei *f*.

6. Se consideră funcţia $f:\Re\to\Re$, $f(x)=\begin{cases}e\cdot e^x, \ x\le -1\\ 2+x, \ x>-1\end{cases}$. Să se arate că funcţia *f* admite primitive pe $\Re$.

7. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\Re$, $f(x)=1-\frac{1}{x}$. Să se arate că funcţia $F:(0,\infty)\to\Re$, $F(x)=x-\ln x$ este o primitivă a funcţiei *f*.

Tabel de integrale nedefinite

Nr. crt	**Integrala nedefinită**
1	$\int 1dx = x + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \forall n \in \mathrm{N}$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
4	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C, x \neq 0$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$
6	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$, $a \neq 0$
8	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$
9	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $a > 0$
10	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\| + C$, $\|x\| > a$, $\mathbf{a > 0}$
11	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$, $a \neq 0$.
12	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
13	$\int \cos x dx = \sin x + C$
14	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
15	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$, $x \neq k\pi, k \in Z$
16	$\int tgx dx = -\ln\|\cos x\| + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
17	$\int ctgx dx = \ln\|\sin x\| + C$, $x \neq k\pi, k \in Z$

Aplicații:

Model aplicație integrala nedefinită

1. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\Re$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F:(0,\infty)\to\Re$ a funcţiei f, care verifică relaţia $F(1)=0$.

Rezolvare:

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

$$\left.\begin{array}{l}\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C\\ F(1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{1}{1}+C=0\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{x}+1$$

2. Se consideră funcţia $f:\Re\to\Re$, $f(x)=\frac{x-1}{x}$. Să se calculeze $\int f(x)dx$.

Rezolvare:

$$\int f(x)dx=\int\frac{x-1}{x}dx=\int(\frac{x}{x}-\frac{1}{x})dx=\int 1dx-\int\frac{1}{x}dx=x-\ln x+C$$

1. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\Re$, $f(x)=1-\sqrt{x}$. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei *f*.

2.Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\Re$, $f(x)=\sqrt{x+2}$. Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.

3.Se consideră funcţia $f:\Re\to\Re$, $f(x)=x^{2011}+x+1$. Să se determine primitiva *F* a funcţiei *f* care are proprietatea *F*(0)=1.

4.Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\Re$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$. Să se arate că $\int(x+1)(x+2)f(x)dx=x^2+3x+C,\ x\geq 0$.

5. Se consideră funcţia $f:\Re\to\Re$, $f(x)=e^{x^2}$ Să se determine $\int f(\sqrt{x})dx, x\in[0,\infty)$.

6. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\Re$, $f(x)=1-x$. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei *f*.

7. Se consideră funcţiile $f,g:(0,\infty)\to\Re$, $f(x)=e^x$ şi $g(x)=\frac{1}{x}$. Să se calculeze primitivele funcţiei *f*+*g*.

8. Se consideră funcţiile $f_m:[0,1]\to R$ definite prin $f_m(x)=m^2x^2+(m^2-m+1)x+1$, unde $m\in$ R. Să se calculeze $\int f_1(x)dx$.

9. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\Re$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F:(0,\infty)\to\Re$ a funcţiei f, care verifică relaţia $F(1)=0$.

10. Se consideră funcţiile $f_m:[0,1]\to R$ definite prin $f_m=x^m+(1-x)^m$. Să se determine $\int f_2(x)dx$.

Breviar Teoretic: <u>Integrarea prin părți</u>

Fie $I\subseteq\Re$ un interval. Dacă $f,g:I\to\Re$ sunt funcții derivabile cu derivate continue, atunci funcțiile $f^{'}g$ și $fg^{'}$ admit primitive și mulțimile lor de primitive sunt legate prin relația:

$$\boxed{\int f(x)\cdot g^{'}(x)dx=f(x)\cdot g(x)-\int f^{'}(x)\cdot g(x)dx}$$

Exemple:

1. Să se calculeze $\int xe^x dx=x\cdot e^x-\int e^x dx=x\cdot e^x-e^x+C=e^x(x-1)+C$

Se realizează schema:

$f(x)=x$ $\qquad$ $f^{'}(x)=1$

$g^{'}(x)=e^x$ $\qquad$ $g(x)=e^x$

2. Să se calculeze $\int \ln x dx=x\cdot\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\cdot\ln x-\int 1dx=x\cdot\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C$

Se realizează schema:

$f(x)=\ln x$ $\qquad$ $f^{'}(x)=\frac{1}{x}$

$g^{'}(x)=1$ $\qquad$ $g(x)=x$

<u>Aplicații:</u>

Să se calculeze:

a) $\int x\ln x dx$

b) $\int xe^{-x}dx$

c) $\int \ln^2 x dx$

d) $\int x\cos x dx$

e) $\int (x^2+5x-2)e^x dx$

f) $\int (x^2+2)e^x dx$

Breviar Teoretic: <u>Prima metodă de schimbare de variabilă</u>

$$\int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)dx$$

$$\begin{cases} u(x)\overset{not}{=}t \\ u'(x)dx = dt \end{cases} \Rightarrow \int f(t)dt = F(t)+C \overset{t=u(x)}{\Longrightarrow} \int f\left(u(x)\right)\cdot u'(x)dx = F\left(u(x)\right)+C$$

I *Pentru* $\int u^n(x)\cdot u'(x)dx$ *folosim* $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}+C$

Exemplu: $\int (2x+1)(x^2+x)^5 dx = \frac{(x^2+x)^6}{6}+C$;

$$\left.\begin{array}{l} t = x^2+x \\ dt = (2x+1)dx \end{array}\right\} \Rightarrow I_1 = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6}+C_1$$

II *Pentru* $\int u^r(x)\cdot u'(x)dx$ *folosim* $\int t^r dt = \frac{t^{r+1}}{r+1}+C,$ *unde* t^r *provine din:* $\begin{cases} \sqrt[n]{t^m} = t^{\frac{m}{n}} \overset{not}{=} t^r \\ \text{sau} \\ \frac{1}{t^n} = t^{-n} \overset{not}{=} t^r \end{cases}$

Exemplu: $\int e^x\sqrt{e^x+3}dx = \frac{2}{3}(e^x+3)\sqrt{e^x+3}+C$;

$$\left.\begin{array}{l} t=e^x+3 \\ dt=e^x dx \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=\int \sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C_1=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C_1$$

III *Pentru* $\int a^{u(x)}\cdot u'(x)dx$ *folosim* $\int a^t dt=\frac{a^t}{\ln a}+C$

Exemplu: $\int 5^{x^2-3x+2}(2x-3)dx=\frac{5^{x^2-3x+2}}{\ln 5}+C$;

$$\left.\begin{array}{l} t=x^2-3x+2 \\ dt=(2x-3)dx \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=\int 5^t\,dt=\frac{5^t}{\ln 5}+C_1$$

IV *Pentru* $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx=\int \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)dx$ *folosim* $\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C$

Exemplu: $\int \frac{8x^3+6x}{2x^4+3x^2+5}dx=\ln\left|2x^4+3x^2+5\right|+C$;

$$\left.\begin{array}{l} t=2x^4+3x^2+5 \\ dt=(8x^3+6x)dx \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=\int \frac{1}{t}dt=\ln|t|+C_1$$

TABEL DE INTEGRALE NEDEFINITE

Dacă $\varphi: I \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă, cu derivată continuă, atunci avem următorul tabel de primitive:

1	$\int \varphi^n(x)\varphi'(x)dx=\frac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1}+C$	$n\in\mathbf{N}$
2	$\int \varphi^a(x)\varphi'(x)dx=\frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1}+C$	$a\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}, \varphi(I)\subset(0,\infty)$
3	$\int a^{\varphi(x)}\varphi'(x)dx=\frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a}+C$	$a\in\mathbf{R}_+\setminus\{1\}$

4	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + C$	φ(x)≠0, (∀)x∈I
5	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{\varphi(x)-a}{\varphi(x)+a}\right\rvert + C$	φ(x)≠±a, (∀)x∈I, a≠0
6	$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{\varphi(x)}{a} + C$	a≠0
7	$\int \sin\varphi(x)\varphi'(x)dx = -\cos\varphi(x) + C$	
8	$\int \cos\varphi(x)\varphi'(x)dx = \sin\varphi(x) + C$	
9	$\int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}dx = tg\varphi(x) + C$	φ(x)∉{(2k+1)$\frac{\pi}{2}\lvert k \in Z$ }, (∀)x∈I
10	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2\varphi(x)}dx = -ctg\varphi(x) + C$	φ(x)∉{kπ$\lvert k \in Z$ }, (∀)x∈I
11	$\int tg(\varphi(x))\varphi'(x)dx = -\ln\lvert\cos\varphi(x)\rvert + C$	φ(x)∉{(2k+1)$\frac{\pi}{2}\lvert k \in Z$ }, (∀)x∈I
12	$\int ctg(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \ln\lvert\sin\varphi(x)\rvert + C$	φ(x)∉{kπ$\lvert k \in Z$ }, (∀)x∈I
13	$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}} = \ln\left[\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)+a^2}\right] + C$	a≠0
14	$\int \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}} = \ln\left\lvert\varphi(x)+\sqrt{\varphi^2(x)-a^2}\right\rvert + C$	a>0 $\begin{cases}\varphi(I)\subset(-\infty,-a)\\ sau\\ \varphi(I)\subset(a,\infty)\end{cases}$
15	$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2-\varphi^2(x)}}dx = \arcsin\frac{\varphi(x)}{a} + C$	a>0, $\varphi(I)\subset(-a,a)$.

<u>Aplicații:</u>

I a) $\int \sin^3 x \cos x dx$;

b) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$;

II a) $\int \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx$;

b) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$;

III a) $\int 2^{3x} dx$;

b) $\int x^2 e^{x^3} dx$;

IV a) $\int \frac{\ln}{x} dx$;

b) $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx$;

c) $\int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$.

Breviar Teoretic: <u>Integrarea funcţiilor raţionale</u>

<u>Definiţie</u>: Funcţiile raţionale simple sunt de forma:

$$\frac{1}{x+a};\frac{1}{ax+b};\frac{1}{(x+a)^n};\frac{1}{ax^2+bx+c};\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c};\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n};\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

definite pe domeniile lor maxime.

I. **1)** $\int \frac{1}{x+a} dx = \int \frac{(x+a)'}{x+a} dx = \ln|x+a| + C$

2) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\int \frac{(ax+b)'}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

Exemplu:

$$\int \frac{1}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)'}{x+3} dx = \ln|x+3| + C$$

II. **1)** $\int \frac{1}{(x+a)^n}dx = \int (x+a)^{-n} \cdot (x+a)' dx = \frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x+a)^{n+1}} + C$

2) $\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{-n+1} \cdot (ax+b)' dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + C =$

$= \frac{-1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C$

Exemplu:

$\int \frac{7}{(x+3)^5}dx = 7\int (x+3)'(x+3)^{-5} dx = 7\frac{(x+3)^{-5+1}}{-5+1} + C = -\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(x+3)^4} + C$

III. $I = \int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$, unde $a \neq 0$.

Caz **1)** $\Delta = 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-x_1)^2}dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{x-x_1} + C$ (formula **III. 1**))

Caz **2)** $\Delta > 0 \Rightarrow ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ (forma canonică)

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a}\int \frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)'}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2}dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}} \ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}\right| + C$$

Caz **3)** $\Delta < 0 \Rightarrow$ din forma canonică

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)'}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2}dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}arctg\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}+C=\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}arctg\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}+C$$

<u>Observaţie</u>: În cazul **2)** avem: $\Delta>0\Rightarrow ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)$$ (se foloseşte formula **I.1)**)

Exemplu:

1. $\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\int(x+1)^{-2}(x+1)'dx=-\frac{1}{x+1}+C$

$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot1\Rightarrow\Delta=0$

2. $\int\frac{1}{x^2+2x-3}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}dx=\frac{1}{4}(\ln|x-1|-\ln|x+3|)+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$

$\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)\Rightarrow\Delta=16>0\Rightarrow x_1=1;x_2=-3\Rightarrow x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$\frac{1}{(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}\Rightarrow1=A(x-1)+B(x+3)\Rightarrow1=x(A+B)+3B-A$

$\begin{cases}A+B=0\\-A+3B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\-(-B)+3B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{4}\\B=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{(x+3)(x-1)}=-\frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)}+\frac{1}{4}\frac{1}{(x-1)}=$

$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)$

3. $\int\frac{5}{x^2+x+3}dx=5\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}dx=5\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{2}}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}+C=\frac{10}{\sqrt{11}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C$

$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot3\Rightarrow\Delta=-11<0$

IV. Se ştie că $\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b \Rightarrow$

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=A\int\frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b+\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\frac{A}{2a}\int\frac{\frac{2aB}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{ax^2+bx+c}dx+\frac{A}{2a}\cdot\left(\frac{2aB}{A}-b\right)\cdot$$

$$\cdot\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\frac{2aB-Ab}{2a}\cdot\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$, unde

$J=\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ se calculează cu formula **III.**

Aplicaţii:

1. $\int\frac{1}{x-1}dx$
2. $\int\frac{1}{2x+3}dx$
3. $\int\frac{1}{3-x}dx$
4. $\int\frac{1}{(x+2)^2}dx$
5. $\int\frac{1}{x^2+2x-3}dx$
6. $\int\frac{2x}{x^2+x-6}dx$
7. $\int\frac{4}{x^2-6x+8}dx$

Breviar Teoretic: <u>Integrala definită</u>

Fie I un interval şi două numere $a,b\in I$. Fie $F:I\to\Re$ o primitivă a funcţiei continue $f:I\to\Re$. Se numeşte integrala definită (sau integrală) a funcţiei f de la a la b numărul real notat prin relaţia: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ (formula lui Leibniz –Newton). **Exemple:**

1. $\int_1^2 (x-1)dx = \int_1^2 xdx - \int_1^2 1dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}-(2-1) = \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

2. $\int_0^1 xe^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = -(1\cdot e^{-1}-0\cdot e^0) - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{e}-(e^{-1}-e^0) = -\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+1 = 1-\frac{2}{e}$

Se realizează schema:

$$\begin{array}{ll} f(x)=x & f'(x)=1 \\ g'(x)=e^{-x} & g(x)=-e^{-x} \end{array}$$

3. $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

$t=\ln x$ $\qquad$ $Daca\ x=1 \Rightarrow t=\ln 1 \Rightarrow t=0$ $\qquad$ $\Rightarrow I=\int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}$

$dt=\frac{1}{x}dx$ $\qquad$ $x=e \Rightarrow t=\ln e \Rightarrow t=1$

4. $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx = \int_0^1 \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}dx = \ln|x-3|\Big|_0^1 - \ln|x-2|\Big|_0^1 = (\ln|-2|-\ln|-3|)-(\ln|-1|-\ln|-2|)$

$=\ln 2-\ln 3-\ln 1+\ln 2 = \ln\frac{2\cdot 2}{3} = \ln\frac{4}{3}$.

$\Delta = 5^2-4\cdot 1\cdot 6 \Rightarrow \Delta = 1>0 \Rightarrow x_1=2; x_2=3 \Rightarrow x^2+2x-3=(x-3)(x-2)$

$\frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow 1=A(x-2)+B(x-3) \Rightarrow 1=x(A+B)-2A-3B$

$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ -2(-B)-3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$

Aplicații:

1.Să se calculeze integralele:

a) $\int_4^5 (x-5)^7\,dx$

b) $\int_1^{\sqrt{2}} x(x^2-1)^{10}\,dx$

c) $\int_0^1 (e^x-1)^5 e^x\,dx$

d) $\int_0^1 (x+3)e^x\,dx$

e) $\int_e^{e^2} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

f) $\int_{-3}^{-2} e^{x+3}dx$